

# 半陰的MPMによる不飽和土の浸透崩壊解析

## Seepage Failure Analysis of Unsaturated Soil using Semi-Implicit MPM

飛彈野壮真<sup>1)</sup> 山口裕矢<sup>2)</sup>高瀬慎介<sup>3)</sup>森口周二<sup>1)</sup> 金子賢治<sup>3)</sup>寺田賢二郎<sup>1)</sup>

Soma Hidano, Yuya Yamaguchi, Shinsuke Takase, Shuji Moriguchi, Kenji Kaneko, Kenjiro Terada

<sup>1)</sup>東北大学 (〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: souma.hidano.t4@dc.tohoku.ac.jp)

<sup>2)</sup>富士通株式会社 (〒 211-8588 神奈川県川崎市中原区上小田中 4-1-1)

<sup>3)</sup>八戸工業大学 (〒 031-8501 青森県八戸市妙字大開 88-1)

The standard material point method (MPM) for unsaturated soil employs the explicit time integration scheme using the large water bulk modulus but has two weakness. One is the pore water pressure oscillation, and the other is the large computational cost. An alternative is the semi-implicit MPM, which assumes the incompressibility of water. This assumption improves the numerical stability and computational efficiency. Nevertheless, few studies have so far been made to deal with large deformation of sloped made of unsaturated soil. In this study, we develop a semi-implicit MPM for unsaturated soil, and several numerical examples are presented to demonstrate the capability and performance of this proposed method. In particular, a validation analysis is carried out using a model experiment of infiltration-induced slope failure.

**Key Words :** Unsaturated soil, Seepage failure, Material point method

### 1. 研究背景と目的

近年、気候変動を一因とする豪雨の頻発に伴い、斜面災害も増加傾向にある。これは雨水の浸透による間隙水の増加、すなわち、土骨格の有効応力の減少に起因している。この現象の表現には、土の間隙がすべて水で満たされている飽和土だけでなく、間隙に空気を含む不飽和土の力学特性の表現が必要となる。この浸透から崩壊の表現に適した数値解析手法として Material Point Method (MPM) が注目されている。MPM は粒子法の一つであるが、有限要素法と類似のアルゴリズムが採用される。有限要素法と比較すると、大変形を扱う場合でもメッシュの破綻が起きない利点がある。また、他の粒子法と比較すると、運動方程式等の求解は、Euler 的に扱われる格子点で行うため、近傍粒子探索が不要であり、計算コストを抑えることができる。

しかしながら、この MPM を用いた研究の多くは飽和土を対象としており、不飽和土を対象とした研究 [1][2] は少ない。加えて、陽解法を採用しながら間隙水の微圧縮性を仮定する場合が多いが、この場合、非常に大きな水の体積弾性率を用いなければならず、間隙水圧が不安定となる。また、CFL 条件に水の体積弾性率が含まれるため、時間刻み幅を小さくしなければならない不都合も生じる [3][4]。これらの問題に対して、間隙水の非圧縮性を仮定する fractional-step 法の採用する手法 [4][5] が提案され、その効果が確認されているが、不飽和土を対象とした先行研究は報告されていない。

そこで本研究では、不飽和土を対象とし、陽解法と比較してより安定的に解析できる fractional-step 法を採用した MPM を開発する。以下では、提案手法の定式化の概略を説明し、単純な数値解析例により基本性能を検証した後、斜面浸透崩壊実験の再現解析による妥当性の確認を行う。

### 2. 研究手法

#### (1) 支配方程式

土骨格と間隙水の密度  $\bar{\rho}_s, \bar{\rho}_w$  は、土粒子密度および水の密度  $\rho_s, \rho_w$  を用いて以下のように表される。

$$\bar{\rho}_s = (1 - \theta)\rho_s, \quad (1)$$

$$\bar{\rho}_w = \theta s_w \rho_w. \quad (2)$$

ここで、 $\theta$  は間隙率、 $s_w$  は飽和度である。このとき、土骨格と間隙水からなる混合体の連続式は以下のように表される。

$$\theta c_w \frac{D^s p_{c_w}}{Dt} + s_w \nabla \cdot \mathbf{v}_s + \nabla \cdot [\theta s_w (\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s)] = 0. \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_w$  はそれぞれ、土骨格の速度、間隙水の速度を表し、サクション  $p_{c_w}$  は、 $p_{c_w} = p_a - p_w$  として間隙空気圧と間隙水圧の差とする。また、 $c_w$  は水分特性曲線から求まる比水分容量であり、本研究では VG モデル [6] を採用する。このとき、有効飽和度  $s_{we}$  は以下の式で表される。

$$s_{we} = \left[ 1 + (\alpha_{vg} p_{c_w})^{n_{vg}} \right]^{-m_{vg}}. \quad (4)$$

ここで、 $\alpha_{vg}, n_{vg}, m_{vg}$  はパラメータである。

また、土骨格と間隙水の運動方程式は以下のように表される。

$$\bar{\rho}_s \mathbf{a}_s = \nabla \cdot [\sigma' - (1 - \theta)s_w p_w I] + \bar{\rho}_s \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}_s, \quad (5)$$

$$\bar{\rho}_w \mathbf{a}_w = -\nabla \cdot (\theta s_w p_w I) + \bar{\rho}_w \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}_w. \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_w$  は、土骨格と間隙水の加速度であり、 $\mathbf{b}$  は物体力である。また、 $\sigma'$  は土骨格の応力であり、構成則には Hencky 超弾性モデルを採用し、4 節の浸透崩

壊解析においては、塑性変形の表現のために Drucker-Prager の降伏基準を用いる。加えて、 $\hat{p}_s, \hat{p}_w$  は土骨格と間隙水の相互作用力であり、以下の式で表現される。

$$\hat{p}_s = -\hat{p}_w = q_{ws} (\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s) - p_w \nabla(\theta s_w). \quad (7)$$

ここで、 $q_{ws} = \theta s_w \bar{\rho}_w g / k_{ws}$  であり、 $g$  は重力加速度の大きさ、 $k_{ws}$  は透水係数である。 $k_{ws}$  は飽和透水係数  $k_{ws}^{sat}$  から以下の式で算出する [7]。

$$k_{ws} = k_{ws}^{sat} (s_{we})^{\xi_{vg}} \left\{ 1 - \left[ 1 - (s_{we})^{\frac{1}{m_{vg}}} \right]^{m_{vg}} \right\}^2. \quad (8)$$

ここで、 $\xi_{vg}$  はパラメータである。

なお、本研究では簡単のために間隙空気の密度は土骨格や間隙水の密度に対して十分に小さいと仮定し、間隙空気の密度と圧力はゼロと仮定する [1][2]。また、粒子が土骨格を表現し、それを基準として間隙水を表現するため、土骨格は Lagrange 的に記述し、間隙水は Euler 的に記述する。

## (2) 時間離散化

本研究で採用する fractional-step 法では、加速度を以下のように分解する。

$$\mathbf{a}_{\alpha}^{n+1} = \frac{\mathbf{v}_{\alpha}^{n+1} - \mathbf{v}_{\alpha}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_{\alpha}^{n+1} - \mathbf{v}_{\alpha}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}_{\alpha}^* - \mathbf{v}_{\alpha}^n}{\Delta t} = \mathbf{a}_{\alpha}^{**} + \mathbf{a}_{\alpha}^*. \quad (9)$$

ここで、下付き添え字の  $\alpha = s, w$  は土骨格または間隙水の値であることを、上付き添え字の  $n$  は時刻  $t^n$  での値であることを示しており、 $\Delta t$  は時間増分である。また、中間速度  $\mathbf{v}_{\alpha}^*$  および中間加速度  $\mathbf{a}^*$ 、修正加速度  $\mathbf{a}^{**}$  は、速度と次の関係にある。

$$\mathbf{v}_{\alpha}^* = \mathbf{v}_{\alpha}^n + \Delta t \mathbf{a}_{\alpha}^*, \quad \mathbf{v}_{\alpha}^{n+1} = \mathbf{v}_{\alpha}^* + \Delta t \mathbf{a}_{\alpha}^{**}. \quad (10)$$

さらに、相互作用項については、時間刻み幅を大きくするために中間速度場を用いて評価する [4]。以上より、時間離散化した運動方程式は以下のように表される。

$$\bar{\rho}_s^n \mathbf{v}_s^* / \Delta t - q_{ws}^n (\mathbf{v}_w^* - \mathbf{v}_s^*) = \bar{\rho}_s^n \mathbf{v}_s^n / \Delta t + \nabla \cdot \{ \boldsymbol{\sigma}^n - (1 - \theta^n) s_w^n p_w^n \mathbf{I} \} + \bar{\rho}_s^n \mathbf{b}^n - p_w^n \nabla(\theta^n s_w^n), \quad (11)$$

$$\bar{\rho}_s^n \mathbf{v}_s^{n+1} / \Delta t = \bar{\rho}_s^n \mathbf{v}_s^* / \Delta t - \nabla \cdot [(1 - \theta^n) s_w^n \Delta p_w^{n+1} \mathbf{I}] - \Delta p_w^{n+1} \nabla(\theta^n s_w^n), \quad (12)$$

$$\bar{\rho}_w^n \mathbf{v}_w^* / \Delta t + q_{ws}^n (\mathbf{v}_w^* - \mathbf{v}_s^*) = \bar{\rho}_w^n \mathbf{v}_w^n / \Delta t - \nabla \cdot (\theta^n s_w^n p_w^n \mathbf{I}) + \bar{\rho}_w^n \mathbf{b}^n + p_w^n \nabla(\theta^n s_w^n), \quad (13)$$

$$\bar{\rho}_w^n \mathbf{v}_w^{n+1} / \Delta t = \bar{\rho}_w^n \mathbf{v}_w^* / \Delta t - \nabla \cdot (\theta^n s_w^n \Delta p_w^{n+1} \mathbf{I}) + \Delta p_w^{n+1} \nabla(\theta^n s_w^n). \quad (14)$$

また、混合体の質量保存則および式 (3) より、圧力 Poisson 方程式は次のように表される。

$$-\theta^n c_w^n \frac{\Delta p_w^{n+1}}{\Delta t} + s_w^n \nabla \cdot \mathbf{a}_s^{**} \Delta t + \nabla \cdot [\theta^n s_w^n (\mathbf{a}_w^{**} - \mathbf{a}_s^{**}) \Delta t] = -s_w^n \nabla \cdot \mathbf{v}_s^* - \nabla \cdot [\theta^n s_w^n (\mathbf{v}_w^* - \mathbf{v}_s^*)]. \quad (15)$$

## (3) 空間離散化

空間離散化にはMPMを採用する。ただし、格子内粒子数が少ない場合に運動方程式の係数行列が悪条件となることを避けるため、質量集中化を行う。さらに本研究では、LBB条件を満たすよう速度場と間隙水圧場の評価点をずらすために、Sub-Grid法 [8]を採用する。そのため、図-1(a)のように間隙水圧場の格子は速度場の格子二つ分とする。

半陰解法である提案手法では圧力 Poisson 方程式を用いて格子点で間隙水圧を求めるのに対して、陽解法では、粒子ごとに質量保存則から求める。そこで、図-1(b)のように運動方程式での間隙水圧の積分点を各格子内の粒子の中心（座標値の平均）とする手法 [9]を採用し、間隙水圧の安定化を図る。

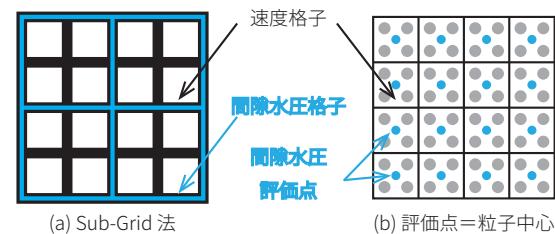


図-1 間隙水圧場の評価点

## 3. 検証例題

### (1) 一次元圧密解析

飽和土に対する妥当性検証として一次元圧密解析を行い、提案手法の解を Terzaghi の圧密理論に基づく理論解および陽解法の解と比較する。表-1に材料パラメータを、図-2に解析モデルと底面の間隙水圧の時間変化を示す。この図から、陽解法では載荷開始直後の間隙水圧が不安定であるが、提案手法では載荷直後から安定した間隙水圧が得られていることが確認できる。

表-1 一次元圧密解析で使用する材料パラメータ

パラメータ	記号 (単位)	値
土粒子密度	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	2600
初期間隙率	$\theta^0$	0.3
Young 率	$E$ (MPa)	10.0
Poisson 比	$\nu$	0.25
水密度	$\rho_w$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000
飽和透水係数	$k_{ws}^{sat}$ (m/s)	$1.0 \times 10^{-3}$

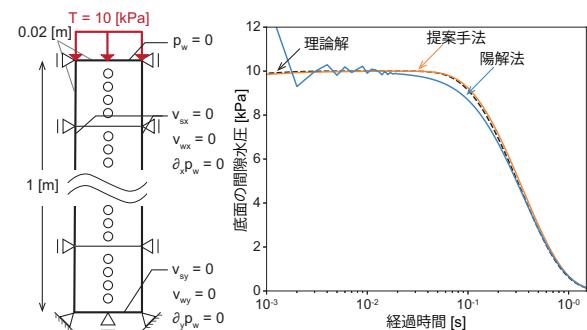


図-2 一次元圧密解析モデルと底面の間隙水圧の時間変化

## (2) 一次元浸透解析

不飽和土に対する妥当性検証のため、ベンチマークとしてよく知られる一次元浸透流出実験 [10] の再現解析を行う。実験は、飽和土で満たした非排水の容器に対し、天面から空気の流入を、底面から水の流出を許し、底面での水の流出速度を計測したものである。このとき、天面側の土の飽和度は徐々に小さくなる。

表-2に材料パラメータ [11] を、図-3に解析モデルを示す。なお、比較対象として従来の陽解法による解析も合わせて行う。CFL条件と透水係数に依存する条件を考慮して安定的に解ける時間刻み幅の上限値以下の値として、陽解法が $1.0 \times 10^{-6}$ s、提案手法が $1.0 \times 10^{-4}$ sとする [3][4]。

図-3の右端に示す結果から、提案手法は陽解法による結果と同様の傾向を示しており、特に開始直後の流出速度が実験結果と整合していることが確認できる。

表-2 一次元浸透解析で使用する材料パラメータ

パラメータ	記号 (単位)	値
土粒子密度	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	2720
初期隙率	$\theta^0$	0.37
Young 率	$E$ (MPa)	1.3
Poisson 比	$\nu$	0.4
水密度	$\rho_w$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000
飽和透水係数	$k_{ws}^{sat}$ (m/s)	$4.5 \times 10^{-6}$
最小飽和度	$s_w^r$	0.02
最大飽和度	$s_w^s$	1.0
不飽和水分特性	$\alpha_{vg}$	0.02
パラメータ	$n_{vg}$	1.5
	$m_{vg}$	1.03
	$\xi_{vg}$	3.5

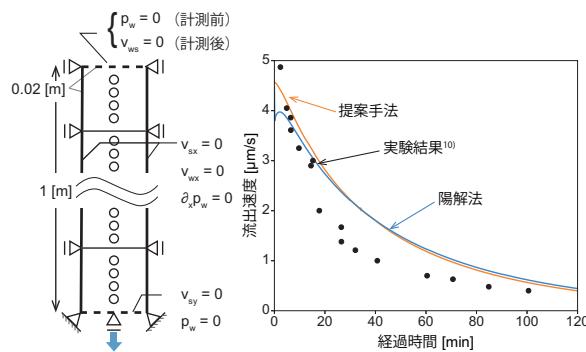


図-3 一次元浸透解析モデルと底面の流出速度の時間変化

## 4. 斜面浸透崩壊実験の再現解析

水の浸透による斜面崩壊のモデル実験の再現解析を行う。表-3に材料パラメータを、図-4に実験モデルと解析モデルを示す。解析モデルにおける速度格子のサイズは $0.01 \times 0.01$ mで、一格子あたり $2 \times 2$ の粒子を配置する。時間刻み幅は $1.0 \times 10^{-4}$ sとする。ただし、浸水口付近( $10 \times 10$ の速度格子)の粒子の粘着力は $c = 20$ kPaとした。これは崩壊時に浸水口付近の粒子が裂けて連立方程式が収束しないことを防ぐためである。

表-3 斜面浸透崩壊実験の再現解析で使用する材料パラメータ

パラメータ	記号 (単位)	値
土粒子密度	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	2731
初期隙率	$\theta^0$	0.50
Young 率	$E$ (MPa)	3.00
Poisson 比	$\nu$	0.30
粘着力	$c$ (kPa)	0.0
粘着力 (浸水口付近)	$c$ (kPa)	20.0
内部摩擦角	$\phi$ (°)	35.0
ダイラタンシー角	$\psi$ (°)	0
水密度	$\rho_w$ (kg/m <sup>3</sup> )	1.00
飽和透水係数	$k_{ws}^{sat}$ (m/s)	$4.21 \times 10^{-5}$
最小飽和度	$s_w^r$	0.02
最大飽和度	$s_w^s$	1.0
不飽和水分特性	$\alpha_{vg}$	0.28
パラメータ	$n_{vg}$	12.898
	$m_{vg}$	0.923
	$\xi_{vg}$	0.5

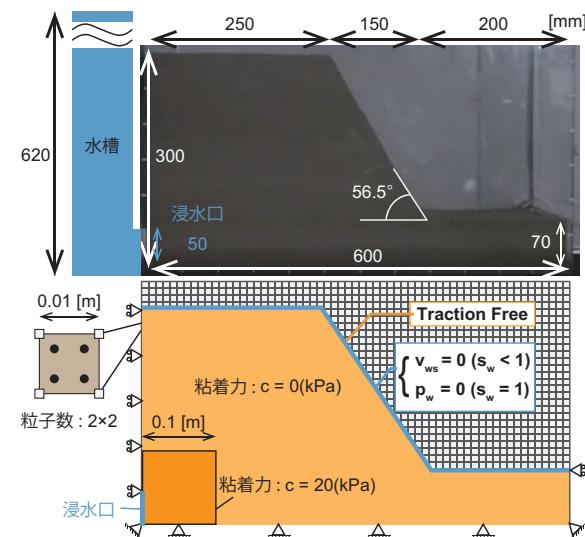


図-4 斜面浸透崩壊実験のモデルと再現解析モデル

時系列の実験結果および解析結果を図-5に示す。この図から、実験では左下の流入部から水が放射状に浸透し、40分程経過すると斜面全体が飽和し崩壊したことが確認できる。提案手法では、放射状に水が浸透する様子が表現できており、40分程で右端を除く斜面全体に浸透した点は実験とおおむね整合している。

崩壊については、実験での斜面先端から流動化した土が流れるように崩れた現象を、解析結果でも表現できていることが確認できる。しかしながら、実験では、斜面の先端の崩壊に起因して上部の斜面が崩壊する段階的な崩壊が発生したが、解析では崩壊した斜面先端付近の粒子の影響がその上部の粒子にも波及し、崩壊した粒子に引っ張られるように崩壊しており、崩壊モードに違いが見受けられる。

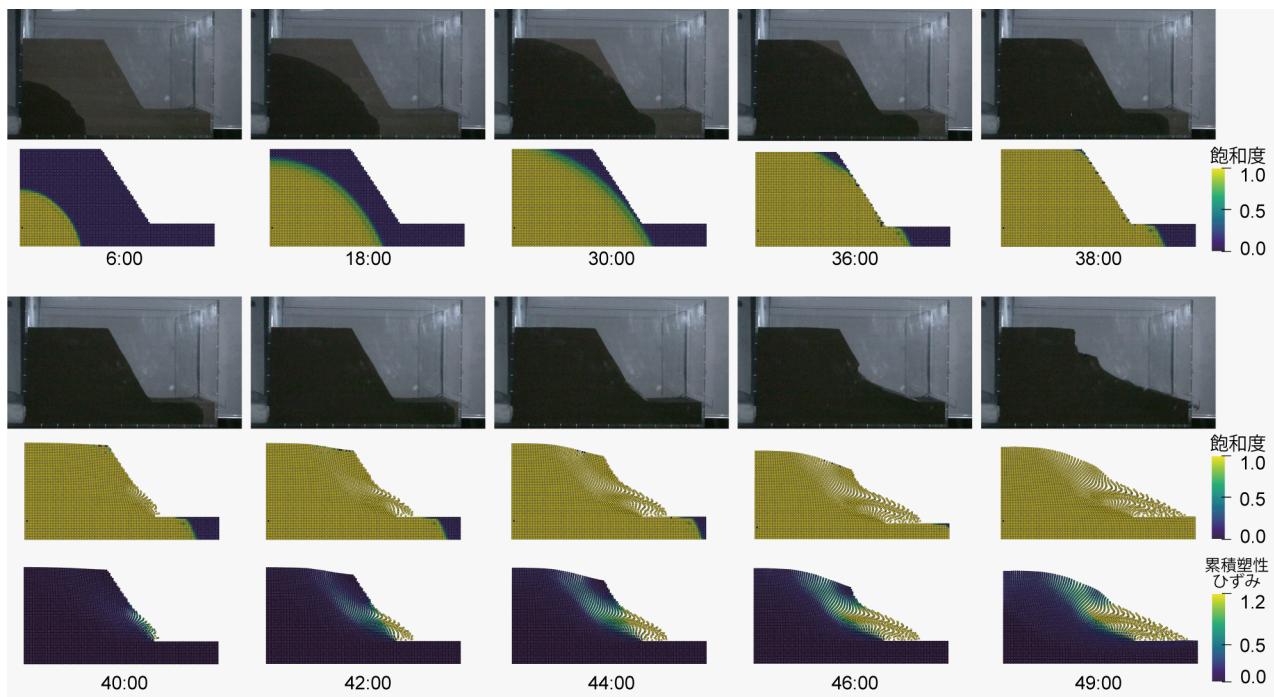


図-5 実験の写真および飽和度と累積塑性ひずみの解析結果

## 5. 結論

不飽和土を対象として、間隙水圧を陰的に考慮可能な fractional-step 法を導入した半陰的 MPM を提案した。この導入により、陽解法の課題である計算コストと間隙水圧の不安定性を抑制することができ、二つの検証例題からその効果を確認できた。加えて、斜面浸透崩壊実験の再現解析では、不飽和土の斜面が飽和し、斜面先端付近から崩壊する様子を表現できた。

以上から、陽解法と比べて時間刻み幅の上限値を大きくすることが可能であり、かつ安定的に間隙水圧を算定しながら、浸透から崩壊までを一貫して解析できる手法を提案できたといえる。しかし、実験での段階的な崩壊が表現については今後の課題したい。

## 参考文献

- [1] Bandara, S., Ferrari, A. and Laloui, L.: Modelling landslides in unsaturated slopes subjected to rainfall infiltration using material point method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 40, No. 9, pp. 1358–1380, 2016.
- [2] Ceccato, F., Yerro, A., Girardi, V. and Simonini, P.: Two-phase dynamic mpm formulation for unsaturated soil, *Computers and Geotechnics*, Vol. 129, p. 103876, 2021.
- [3] Mieremet, M., Stolle, D., Ceccato, F. and Vuik, C.: Numerical stability for modelling of dynamic two-phase interaction, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 40, No. 9, pp. 1284–1294, 2016.
- [4] Kularathna, S., Liang, W., Zhao, T., Chandra, B., Zhao, J. and Soga, K.: A semi-implicit material point method based on fractional-step method for saturated soil, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, No. March, pp. 1–32, 2021.
- [5] Yamaguchi, Y., Takase, S., Moriguchi, S. and Terada, K.: Solid-liquid coupled material point method for simulation of ground collapse with fluidization, *Computational Particle Mechanics*, Vol. 7, pp. 209–223, 2020.
- [6] van Genuchten, M. T.: A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 44, No. 5, pp. 892–898, 1980.
- [7] Mualem, Y.: A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resources Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 513–522, 1976.
- [8] Bressan, A. and Sangalli, G.: Isogeometric discretizations of the stokes problem: stability analysis by the macroelement technique, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 33, No. 2, pp. 629–651, 2013.
- [9] Bandara, S. and Soga, K.: Coupling of soil deformation and pore fluid flow using material point method, *Computers and Geotechnics*, Vol. 63, pp. 199–214, 2015.
- [10] Liakopoulos, A. C.: *Transient flow through unsaturated porous media*, University of California, Berkeley, 1964.
- [11] Uzuoka, R. and Borja, R. I.: Dynamics of unsaturated poroelastic solids at finite strain, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.