

高次有限要素を用いた Helmholtz 方程式の大規模並列解析

Large-Scale Parallel Solution of Helmholtz Equation
by High-Order Finite Element Method

塚本顕成¹⁾ 馬込望²⁾ 三目直登³⁾

Akinari Tsukamoto, Nozomi Magome, and Naoto Mitsume

¹⁾筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1,

E-mail:tsukamoto.akinari.qw@alumni.tsukuba.ac.jp)

²⁾筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1,

E-mail:magome.nozomi.sw@alumni.tsukuba.ac.jp)

³⁾博 (工) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail:mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

The purpose of this study is to develop and verify a fast simulation framework for the Helmholtz equation for frequency-domain acoustic analysis of sound fields using the finite element method. In this study, a framework for solving the 3-D Helmholtz equation was developed and parallel computation using the domain decomposition method was implemented for it. It reads a mesh in which the domain is partitioned into first-order hexahedral elements or higher-order elements. Results obtained by it was compared with theoretical solutions including sound wave propagation problems in pipes to verify the accuracy of our proposed framework. Numerical results show good agreement and appropriate convergence with the theoretical ones. In addition, the parallelization was confirmed to have moderate parallel performance.

Key Words : *Helmholtz equation, finite element method, parallel computation, domain decomposition method*

1. 序論

近年、コンサートホールや音楽スタジオ、講堂などの音響設計には、計算機を用いた音場の数値解析技術が用いられている [1][2]。従来、音響設計の実設計前に行われていた模型や試作品などの実物を用いた試験の繰り返しには、多くの時間・費用が必要であった。数値解析を用いることで、実物を用いた試験を行わなくとも設計品質を高めることができ、実際に製造するまでの時間・費用を削減することが可能である。

また、近年のメタバースの流行により、VR 技術や AR 技術などを活用したさまざまな仮想空間や拡張現実でのサービスが開発されており、実際に仮想空間内での共同製品開発やリアルタイムシミュレーションなどが可能なプラットフォーム [3] の開発が行われている。また、現実世界に存在する生産設備などを仮想空間で表現する技術であるデジタルツインを利用した製品設計・開発も注目されている。

このような背景から、音響解析も仮想空間への適用が求められて行くと考えられ、解析へのリアルタイム性及び、現実に近い体験のための精度が求められる。リアルタイムでの音響解析となると計算コストが課題となり、特に高周波数帯の解析時は出現する最短の波長に合わせて要素分割をするためにメッシュを細かく切る必要があり、その分計算コストが増大する問題がある。

既存の音響解析の研究において、時間領域差分法 (finite-difference time-domain: FDTD) 法 [4] や有限要素法 (finite element method: FEM)[5][6] を用いた解析手法

や、幾何音響論に基づく音線法や鏡像法といった手法 [7] が提案されている。

時間領域差分法は構造格子を利用するため、領域の境界付近での精度を得るには非常に細かい格子を用いて領域全体を分割する必要がある。幾何音響理論に基づいた音場解析手法は、音の波動性を考慮せず音の伝搬を幾何学的に扱うものであり、計算時間の点で有利である特徴があるが、波動現象を考慮しないことで誤差が生じる問題がある。

一方、有限要素法は偏微分方程式を弱形式化した上で、解析対象の領域全体を多数の単純な形状をした要素に分割し近似解を求める手法であり、メッシュを利用することから複雑な形状や境界の表現に有利である。そのため、複雑形状や境界付近での高い計算精度が期待できる。

本研究では、有限要素法による音場の周波数領域音響解析のための、Helmholtz 方程式ソルバの開発とその妥当性の検証を目的とする。

また、分散メモリ型並列計算機に適した並列化手法として知られる領域分割法を適用し、計算の高速化の達成も目的とする。領域分割法は対象領域を幾何学的に分割して解析する手法であり、各分割領域における計算量を均一にし、並列効率を悪化させる領域間の通信量を最小化することにより計算の高速化を目指す。

2. 定式化

(1) Helmholtz 方程式の有限要素法による定式化

有限要素法による音場の数値解析では、支配方程式である Helmholtz 方程式に重み付き残差法を適用し、離散化することによって得られた連立一次方程式を解くことによって近似解を得る。本節では Helmholtz 方程式の有限要素法による定式化について述べる。

境界 Γ で囲われた三次元空間の音場 Ω を考える。音速を c とすると、音場を支配する方程式は速度ポテンシャル ϕ の波動方程式で

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

のように表現される。角周波数 ω とし、速度ポテンシャル ϕ を未知の関数 $\Phi(x)$ を用いて

$$\phi = \Phi \exp(-j\omega t) \quad (2)$$

と置き変数分離する。ここで j は虚数単位である。式 (2) を速度ポテンシャル ϕ の波動方程式 (1) に代入すると、

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

となり、定常状態における音場の支配方程式である Helmholtz 方程式が導出された。ここで k は波数であり、 $k = \omega/c$ である。このとき音圧 p は、空気密度 ρ として

$$p = j\omega\rho\Phi \quad (4)$$

である。

境界 Γ に関して、吸音境界 Γ_a 、振動境界 Γ_v が与えられているとする。音場の数値解析では境界での吸音特性を、境界での音圧と、境界に垂直な粒子速度の比である音響インピーダンスで表される。吸音境界 Γ_a での吸音特性は、次式の音響インピーダンスによって表す。

$$Z_n = \frac{p}{v_n} \quad (5)$$

Z_n は音響インピーダンス、 v_n は法線方向粒子速度である。速度ポテンシャルの定義より法線方向粒子速度 v_n は

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (6)$$

である。式 (5) に式 (6) と式 (4) を代入すると、吸音境界 Γ_a の境界条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -j\omega\rho \frac{1}{Z_n} \Phi \quad \text{on } \Gamma_a \quad (7)$$

で表される。境界面が剛境界 (完全反射面) のとき、表面インピーダンスは無限大であり、この条件は、剛境界での粒子速度をゼロとすることで境界面を表現することが可能である。振動境界 Γ_v で境界が粒子速度 v で振動するとするとき境界条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -v \quad \text{on } \Gamma_v \quad (8)$$

と表される。

Helmholtz 方程式に重み関数 W を乗じて音場全体を積分すると

$$\int_{\Omega} W (\nabla^2 + k^2) \Phi d\Omega = 0 \quad (9)$$

となる。Green の公式を使い式を整理すると

$$\int_{\Omega} [-\nabla W \cdot \nabla \Phi + k^2 W \Phi] d\Omega + \int_{\Gamma} W \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (10)$$

となり、弱形式が導かれた。式 (10) に境界条件である式 (7) と式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla W \cdot \nabla \Phi - k^2 W \Phi] d\Omega + j\omega\rho \frac{1}{Z_n} \int_{\Gamma_a} W \Phi d\Gamma \\ = -v \int_{\Gamma_v} W d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

音場 Ω を、 n_e 個の境界 Γ_e で囲われた有限要素 Ω_e に分割すると、弱形式は要素ごとの積分の和となる。 Φ を内挿関数 N を使って、 $\Phi = N \cdot \Phi$ とする。分割された要素内の節点数を k とすると、 Φ は、

$$\Phi = (\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_k) \quad (12)$$

と表される。 Φ の添字は要素内の節点番号を示している。また、 N および ∇N は

$$N = (N_1 \quad \dots \quad N_k) \quad (13)$$

$$\nabla N = (\nabla N_1 \quad \dots \quad \nabla N_k) \quad (14)$$

である。 N の添字は要素内の節点番号を示している。また、重み関数 W は Galarkin 法を適用し、内挿関数 N を使って $W = N \cdot w$ とする。ここで、 w は重み関数の節点値である。式 (11) を離散化すると

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \nabla N^T \nabla N d\Omega - k^2 \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega \right. \\ \left. + j\omega\rho \frac{1}{Z_n} \int_{\Gamma_e} N^T N d\Gamma \right] \Phi \\ = \sum_{e=1}^{n_e} -v \int_{\Gamma_e} N^T d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

となる。行列式で表現すると

$$A\Phi - k^2 M\Phi + j\omega\rho C\Phi = q \quad (16)$$

である。全体行列をそれぞれの要素ごとに分けた要素行列 A_e 、 M_e 、 C_e とおく。このとき要素剛性行列 A_e 、 M_e はそれぞれ

$$A_e = \int_{\Omega_e} \nabla N^T \nabla N d\Omega \quad (17)$$

$$M_e = \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega \quad (18)$$

となる。また要素減衰行列 C_e は

$$C_e = \frac{1}{Z_n} \int_{\Gamma_e} N^T N d\Gamma \quad (19)$$

で与えられる。右辺ベクトル q は音源分布を表しており

$$q = \sum_{e=1}^{n_e} v \int_{\Gamma_e} N^T d\Gamma \quad (20)$$

と表現される。音場の周波数領域解析では式 (16) の連立一次方程式を解くことで領域内の速度ポテンシャルを計算する。

(2) 複素対称連立一次方程式の反復解法

式 (16) を見ると減衰行列項が虚部を持つため、全体行列は複素対称行列となっている。そこで本研究では式 (16) を、エルミート行列ではない線形方程式に対して有効である COCG 法 (conjugate orthogonal conjugate gradient method)[8] によって解く。

3. 三次元 Helmholtz 方程式ソルバ

(1) 三次元有限要素法における六面体一次要素

本研究で開発した三次元 Helmholtz 方程式ソルバでは領域を六面体一次要素で分割されたメッシュを使用する。領域中の六面体一次要素の局所節点 1、2、3、4、5、6、7、8 の座標と物理量をそれぞれ、 (x_1, y_1, z_1, u_1) 、 (x_2, y_2, z_2, u_2) 、 (x_3, y_3, z_3, u_3) 、 (x_4, y_4, z_4, u_4) 、 (x_5, y_5, z_5, u_5) 、 (x_6, y_6, z_6, u_6) 、 (x_7, y_7, z_7, u_7) 、 (x_8, y_8, z_8, u_8) とする。六面体一次要素では、 (x, y, z) 座標系の要素を座標変換により (ξ, η, ζ) における辺長 2 の立方体基準要素に変形してから計算を行う。基準要素の (ξ, η, ζ) 座標は各節点でそれぞれ、1(-1,-1,-1)、2(1,-1,-1)、3(1,1,-1)、4(-1,1,-1)、5(-1,-1,1)、6(1,-1,1)、7(1,1,1)、8(-1,1,1) となっている。このときの座標変換式は、

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i y_i \\ z &= \sum_{i=1}^8 N_i z_i \end{aligned} \quad (21)$$

である。各形状関数は、

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_5 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_6 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_7 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_8 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \end{aligned} \quad (22)$$

である。形状関数と各節点での物理量をつかって六面体要素の物理量 u を表すと、

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 + N_7 u_7 + N_8 u_8 \quad (23)$$

となる。六面体一次要素の場合、式 (16) で表した行列式の要素行列 A_e 、 M_e 、 C_e はそれぞれ、

$$A_e = \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} \nabla N_1 \\ \vdots \\ \nabla N_8 \end{pmatrix} (\nabla N_1 \quad \dots \quad \nabla N_8) d\Omega \quad (24)$$

$$M_e = \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_8 \end{pmatrix} (N_1 \quad \dots \quad N_8) d\Omega \quad (25)$$

$$C_e = \int_{\Gamma_e} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_8 \end{pmatrix} (N_1 \quad \dots \quad N_8) d\Gamma \quad (26)$$

と表される。三次元 Helmholtz 方程式ソルバでは、本項で述べた形状関数を使い連立一次方程式を構築する。

開発ソルバーの精度検証は Helmholtz 方程式の代数的な理論解を用いた検証と、管路内の音波伝搬モデルによる検証を行った。

(2) 三次元 Helmholtz 方程式ソルバの理論解での精度検証

三次元 Helmholtz 方程式の代数的な理論解として式 (27) を用いる。

$$\Phi = \cos kx + \cos ky + \cos kz \quad (27)$$

境界に式 (27) で表される理論解の値を Dirichlet 境界条件として全境界に課し、計算し得られた解と理論解を比較することによって精度検証を行う。

誤差評価は式 (28) に示される L^2 ノルムによる誤差評価式によって行う。

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} |\Phi_{\text{calc}} - \Phi|^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} |\Phi|^2 d\Omega}} \tag{28}$$

ここで Φ は理論解であり、 Φ_{calc} は計算解である。有限要素法の場合、場が連続であるため誤差は厳密には積分型になる。式 (28) の積分は 3 次のガウス求積により求めた。

解析領域は図 1 で示すような六面体一次要素で分割された各辺長さ 1 の立方体とする。

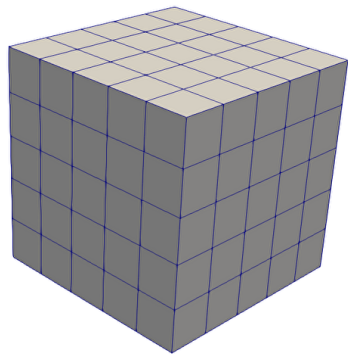


図-1 三次元 Helmholtz 方程式ソルバの理論解検証解析領域

解析条件は表 1 に示す。

表-1 3次元理論解検証解析条件	
音速	343[m/s]
解析周波数	500[Hz]
空気密度	1.3[kg/m ³]
線形ソルバー	COCG 法
収束判定値	1.0 × 10 ⁻¹⁰
最大反復数	10000

要素幅に対する L^2 誤差ノルムを図 2 に示す。縦軸が L^2 誤差ノルム、縦軸が要素幅である。要素幅の減少に

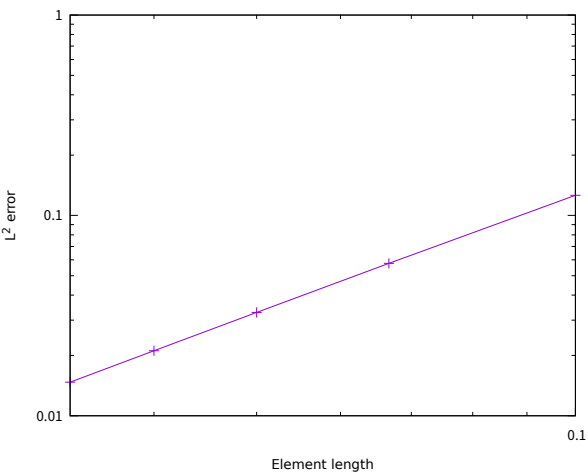


図-2 三次元理論解検証 L^2 誤差ノルム

対して、誤差が 2 次で収束した。

(3) 三次元 Helmholtz 方程式ソルバの管路内音波伝搬モデルでの精度検証

管路内音波伝搬モデルでの精度検証として図 3 に示すような問題を考える。解析領域は長さ 1m、幅 0.2m、

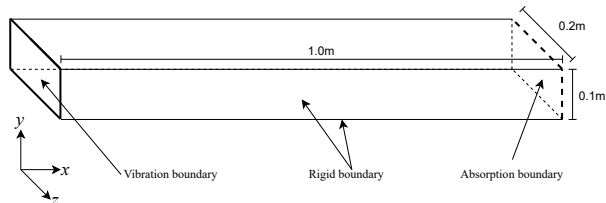


図-3 三次元管内音波伝搬モデル問題

高さ 0.1m の長方体であり、左端に振動境界、右端に吸音インピーダンスが与えられている。振動境界と吸音境界をのぞく境界はすべて剛境界 (全反射) とした。この問題の理論解は

$$p(x) = \rho c \frac{Z_n \cos k(l - x) + j \rho c \sin k(l - x)}{\rho c \cos kl + j Z_n \sin kl} v_0 \tag{29}$$

である。解析領域は図 4 に示すような六面体一次要素で分割した。また、表 2 に解析条件を示す。

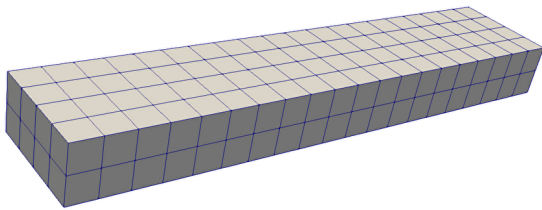


図-4 三次元管内音波伝搬モデル問題使用メッシュ

表-2 三次元管内音波伝搬モデル解検証解析条件	
音速	343[m/s]
解析周波数	500[Hz]
空気密度	1.3[kg/m ³]
振動境界速度	0.014[m/s]
吸音境界音響インピーダンス	445.9[kg/(m ² s)]
線形ソルバー	COCG 法
収束判定値	1.0 × 10 ⁻¹⁰
最大反復数	10000

図 5 は 960 要素 315 節点での解析結果の音圧分布の可視化結果であり、図 6 は理論解の音圧分布可視化結果である。

図 5 の解析結果と図 6 の理論解を比較すると、両者は良好な一致を見せており、妥当な計算結果を得られていることがわかる。

図 7 は管路内音波伝搬モデルでの、要素幅に対する誤差ノルムである。縦軸が L^2 誤差ノルム、縦軸が要素幅である。要素幅の減少に対して、2 次で誤差が収束している。

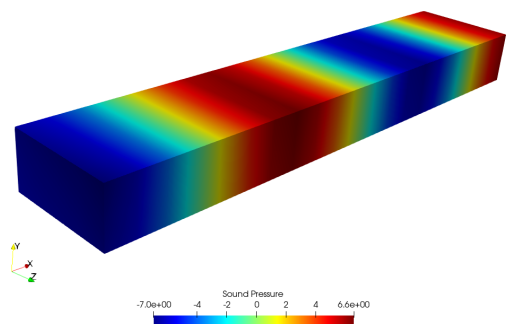


図-5 三次元管内音波伝搬モデル問題解析結果

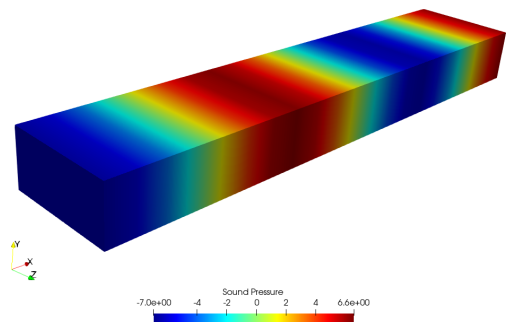


図-6 三次元管内音波伝搬モデル問題理論解

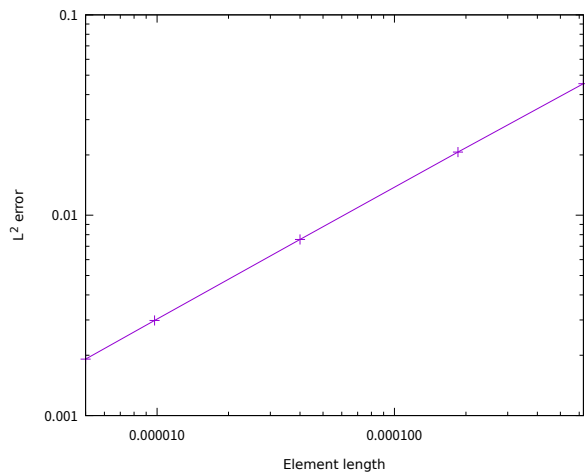


図-7 三次元管内音波伝搬モデル問題 L^2 誤差ノルム

音圧分布計算結果と要素数に対する誤差の収束はどちらも良好であり、正常に問題を解くことができていると考えられる。

表-3 三次元 Helmholtz 方程式ソルバ並列化性能検証条件

誤差評価式	$\epsilon = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} \Phi_{\text{calc}} - \Phi ^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} \Phi ^2 d\Omega}}$
総節点数	1331,4096,9261,17576,29791
並列数	1,2,3,4,5,6,7,8
音速	343[m/s]
解析周波数	500[Hz]
空気密度	1.3[kg/m ³]
線形ソルバー	COCG 法
収束判定値	1.0×10^{-10}
最大反復数	10000

4. 並列化

(1) 並列化とは

並列化とはコンピュータである処理をする際、処理を細分化し複数のプロセッサで同時に処理を実行することである。本研究では開発した三次元 Helmholtz 方程式ソルバに領域分割法を適用した並列計算を実装した。なお、並列計算ライブラリとして MPI(message passing interface) を用いた。

(2) 並列化結果

並列化精度検証として、Helmholtz 方程式の代数的理論解による精度検証問題に並列計算を適用し性能評価を行う。図 8 は 8 並列時の領域分割である。図 8 の黒く塗られた要素が Overlapping 領域を表している。

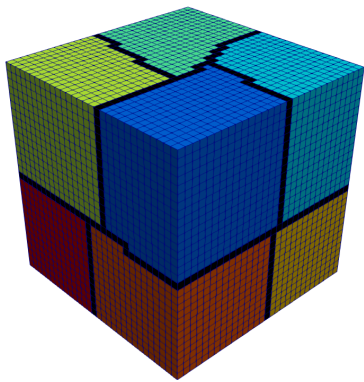


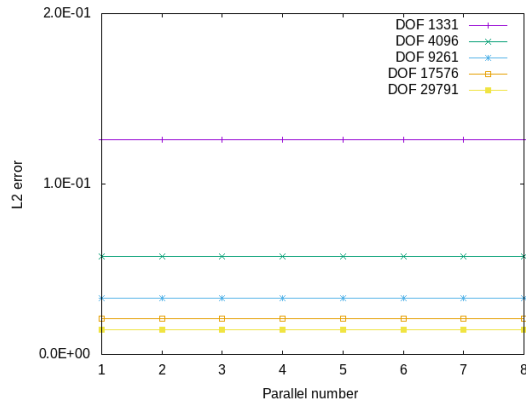
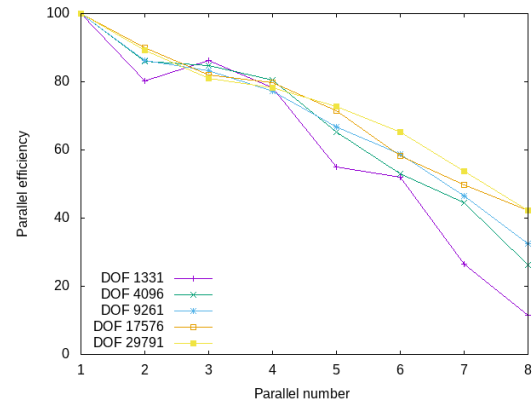
図-8 8 並列時領域分割

また、本研究において用いる並列計算機環境は、Intel Core i7 11700(2.50 GHz/Smart Cache 16MB) のマルチコア CPU および 32GB のメモリが搭載されている PC を使用した。本研究では共有メモリ型計算機での検証であるが、開発コードは MPI を用いており分散メモリ型並列計算機に対応している。表 3 に本検証の解析条件を示す。

a) 解の不変性検証

図 9 は並列数を変化させたときの L^2 誤差ノルムを示したものである。

全ての節点数で、並列数を変化させても L^2 誤差ノルムが一定である。並列数を変えても解が変化しておらず解の不変性が保たれており、正しく並列計算を実装できていると言える。

図-9 並列数と L^2 誤差ノルム図-11 並列数と並列化効率 E_n [%]

b) 並列性能評価

並列性能の評価指標として、式 (30) と式 (31) に示す加速率 S_n と並列化効率 E_n [%] を用いる。

$$S_n = \frac{T_1}{T_n} \quad (30)$$

$$E_n = \frac{S_n}{n} \times 100 \quad (31)$$

ここで n は並列数であり、 T_n は n 並列時の計算時間である。

図 10 と図 11 はそれぞれ並列数 n に対する加速率 S_n と並列化効率 E_n [%] である。

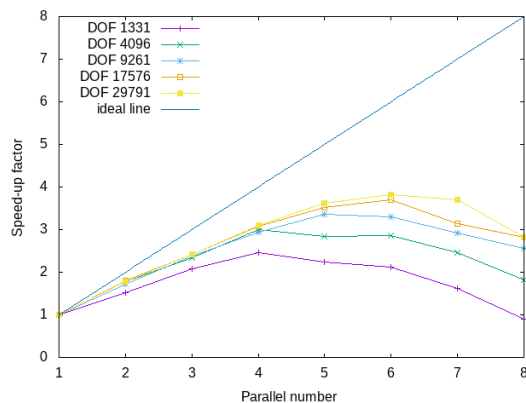
図-10 並列数と加速率 S_n

図 10 より並列数 n に比例して加速率 S_n が増加しており、並列化による計算時間の短縮が確認できる。図 11 の並列化効率 E_n は並列数の増加とともに低下している。これは並列数が増加し通信量が増加することによるオーバーヘッド増加のためだと考えられる。また、加速率 S_n と並列化効率 E_n は総節点数が増加するほど高くなっていることがわかる。総節点数が多い場合は、1 プロセッサあたりの担当節点数が大きくなり、通信量に対するプロセス内の計算時間の割合が増加するため、並列化効率 E_n が向上していると考えられる。

以上の結果より三次元 Helmholtz 方程式の領域分割法を用いた有限要素法への並列計算の実装をし、計算時間の短縮を達成した。

5. 結論

本研究では、有限要素法による音場の周波数領域音響解析のための、Helmholtz 方程式ソルバの開発を行った。開発ソルバにて、Helmholtz 方程式理論検証と管路内音波伝搬問題での検証を行いすべての検証において、良好な精度と誤差収束が確認できた。また領域分割型並列計算の実装を行い、計算の高速化を達成した。謝辞: 本研究は、JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S および JSPS 科研費 22H03601 の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- [1] 高橋 顕吾, 山川 高史. 建築音響ホール設計-より良い響きの追求-. 計測と制御, 43(4):348-352, 2004.
- [2] 佐久間 哲哉. 室内音響設計におけるシミュレーション技術の活用. 日本音響学会誌, 57(7):463-469, 2001.
- [3] NVIDIA. Nvidia omniverse, 2023. <https://www.nvidia.com/ja-jp/omniverse/>.
- [4] Takatoshi Yokota, Shinichi Sakamoto, and Hideki Tachibana. Visualization of sound propagation and scattering in rooms. *Acoustical science and technology*, 23(1):40-46, 2002.
- [5] 岡本則子, 大鶴徹, 富来礼次, 藤野清次. 有限要素法による室内音場解析における cocg 法の収束性. 日本計算工学会論文集, 2005:20050027-20050027, 2005.
- [6] 山本広太, 工藤彰洋, 武居周. 並列有限要素法に基づく大規模音響解析手法の基礎検討. In 電気関係学会九州支部連合大会講演論文集 平成 28 年度電気・情報関係学会九州支部連合大会 (第 69 回連合大会) 講演論文集, pages 180-180. 電気・情報関係学会九州支部連合大会委員会, 2016.
- [7] 田口東, 吉澤哲也, 佐藤克昌, 芹川光彦. 幾何音響学的シミュレーションにおける音線反射経路の効率的な計算法. 日本音響学会誌, 41(8):542-545, 1985.
- [8] Henk A van der Vorst and Jan BM Melissen. A petrov-galerkin type method for solving $ax=b$, where a is symmetric complex. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):706-708, 1990.