

遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解による マルチボディダイナミクス数値計算法のコンセプト

Concept of numerical scheme for multibody dynamics by the transfer matrix finite element method and discrete Helmholtz decomposition

今村純也¹⁾

Junya Imamura

1) 博(工) imi計算工学研究室 (〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp)

In a previous paper, I have proposed a generalized force method (GFM), in which the simultaneous equation is constructed novel reduction method for the treatment of the continua. This report is part of research regarding Helmholtz theorem, to apply the Helmholtz decomposition ($H-d$) to the finite element method. $H-d$ is, however, in a certain coordinate expression. I proposed an improved $H-d$ expression called dHd . The dHd includes $H-d$ and other coordinate expressions. That is a multidirectional FEM concept. The objective of this report is to propose a concept of the numerical scheme for the multibody dynamics by transfer matrix method and above dHd . Depends on your habit, because I fell the cylindrical or polar coordinate system which is used in general for MBD calculation. The transfer matrix calculation uses Cartesian coordinate, and dHd uses Lagrangian coordinate which is called also natural coordinate, but potentials in dHd are represented in current coordinate.

Key Words: Transfer matrix method, Helmholtz decomposition, Discrete Helmholtz decomposition, Multibody dynamics, Multibody system.

1. 目的と背景・概要

(1) 目的

自然座標系表示のマルチボディダイナミクス(MBD)の計算には、通常、円筒座標系・極座標系の計算が入る。慣れにもよるが、煩瑣に感じる。

そこで冒険的であるが、デカルト座標系のみでシンプルに表せる、遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解による数値計算法のコンセプトを提示する。

計算安定化のために“共役変数”を、離散Helmholtz分解に基づき組込む。

遷移行列法・遷移行列有限要素法も、Helmholtz分解法・離散Helmholtz分解法も、数値計算法として、未だ一般に定着しているわけではない。

そこで特徴・特長の共通認識のため、多少長くなるが着目点を、なるべく平易に述べて置く。

(2) 離散Helmholtz分解法

本稿は“Helmholtz分解[1]に基づく連続体理論の、有限要素法への適用に関する研究”の一環である。

Helmholtz分解($H-d$)の表示法を修正し、離散Helmholtz分解(dHd)表示法を提示している。(付録1参照。)

修正のポイントは、 $H-d$ 表示のLateral(縦)成分 $\nabla\varphi$ を非圧縮と圧縮の2成分に分け、 $\nabla\varphi$ の非圧縮成分でもCoulombゲージ($\text{div}\psi = 0$)を表す、とする点に在る。

つまり、 $\nabla\psi$ の対角項(： $\nabla_{diag}\psi$ と定義)と $\nabla\varphi$ は等しい、とするものである。(i.e. ; $\nabla\varphi = \nabla_{diag}\psi$)

したがって圧縮成分(： $\nabla\varphi^c$ で表す)の計算に先立って

は、非圧縮材料・圧縮材料の如何に拘わらず、非圧縮計算は必須である。

圧縮成分計算は、変位を $\nabla(\varphi^c + \varphi)$ で表し、 $\nabla\varphi^c$ を連立方程式の未知数として解いて行く、こととなる。(特解には一般解を加えて表す。)

(3) 共役変数

$H-d$ 修正のいま一つは、Cauchy-Riemann (C.-R.)の関係式を3Dにも組み込めるよう、回転形の curlu と対の形で、せん断形をベクトル演算子： shru で表し、C.-R.の横成分3D式を： $\langle \text{shru} = 0 \rangle$ としたことである。

すなわち横成分 curlu の計算には($\text{shru} = 0$)を、制約条件とする。(その逆も同様。)

同様に、C.-R.の縦成分式も3D化し、2Dの関係式： $\langle \partial u/\partial x - \partial v/\partial y = 0 \rangle$ を、(y-z)2D, (z-x)2Dでも同様に表して、3D演算子 $\langle \text{naiu} = 0 \rangle$ でベクトル表示する。

対応して、2Dの divu も同様に、3平面(鏡面)で表して、ベクトル演算子： imiu で表す。

つまり、 $\nabla\mathbf{u}$ の対角項を $\nabla_{diag}\mathbf{u}$ として、和分解形で $2\nabla_{diag}\mathbf{u} = \text{imiu} + \text{naiu}$ を表す、と定義した。

$\nabla\psi$ も演算子で、和分解表示して行く。

それら、それぞれ対の変数を互いに“共役変数”と呼ぶものであり、計算安定化(数値 Locking の排除)のために活用する。

要するに、 $\nabla\mathbf{u}$ は9成分の自由度を有するので、安定計算には9条件式以上必要、とするものである。

また、MBDの3D計算は複雑になるので、3つの鏡面像で2D計算して行くよう、分解表示するものである。

(4) 遷移行列有限要素法

遷移行列法[2][3] は還元法[4] と呼ばれ、伝達マトリックス法[5] と同邦訳されている。

既報では、遷移行列法は u_i の“有限Taylor級数表示式の1次項以上には剛性 G を乗じて $\nabla F_i (= G \nabla u_i)$ で表す”と説明して来た。

近時、剛性が異なる要素間の勾配の連続性は、 F_i の勾配(応力成分)を連続させるべき境界面と、 u_i の勾配(ひずみ成分)を連続させるべき境界面の、2種類あることに気付いた。(同じ剛性では関係ない特性。)[6]

したがって状態量: {変位, 応力}の遷移行列と、 u_i のTaylor 級数表示のままの: {変位, ひずみ}の遷移行列を用意し、選択的に適用する、こととなる。それを“混合変分法”と呼ぶ。

剛性が異なるケースで、一方が $G = \infty$ では、混合変分法でなければ、数値Lockingとして顕れる。

気・液界面では、法線応力により気体粒子は、はじけ飛んでしまう、と表現される現象である。[7]

(5) 遷移行列と離散Helmholtz分解による自然座標系計算法

まず、遷移行列法の特徴は $G = \infty$ の部材・有限要素が組み込めることである。それにより変位・応力のカップリング行列[†]が容易に組み込める。

前述のように、通常、有限Taylor 級数で変位の要素関数を表すのに対し、遷移行列有限要素法では、勾配項以上は $\{\nabla F_i, \nabla \nabla F_i, \dots\}_0$ で表す。

したがって変位の、Taylor 級数勾配項の、当該係数ベクトル成分は $\{\nabla F_i\}_0 / G$ で表す。それにより変位のカップリングが可能となる。

dHd の特徴は、粒子の軌跡(流線)の座標を、 Φ の流通座標で表す点である。([付録2]参照のこと。)

したがって、遷移行列法・離散Helmholtz分解法で弾性体・剛体のマルチボディダイナミクスを計算して行ける。

(6) 遷移行列法の変位法への適用

遷移行列法のいまひとつの特性は、アーチなど曲線桁が容易に組み込める点である。ツリー状の系(開いた系: offene Tragwerke [2])を容易に組み込める特性である。

ネット状の系(閉じた系: geschlossene Tragwerke [3])は変位法の特性を活用して組立てる。

変位法でアーチを組み込んだ連立方程式係数行列は、当該部分はバンドマトリックスとなる。

[†] 2 点間の $\{w, \theta\}$ および $\{M, Q\}$ のカップリング行列はいずれも $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。棒の $\{u\}$ および $\{N\}$ は、いずれも $[1]$ 。

バンド状の部分のみsweep out 法で掃き出して前進計算しておけば、残る後退計算用の小行列で、閉じた系でも解いて行ける。

sweep out に代わり、遷移行列を使えば、その小行列をエレガントに計算可能であり、閉じた系にも部分的に活用できる。

(7) 弾性バネで支持される桁・床の遷移行列法計算

単なるピン支持点の連続桁計算は、遷移行列法の最も得意とする問題である。

弾性バネで支持される桁・床の数値計算は、大変困難とされていた。

既報[8]でそれを克服する技法を確立した。

桁の結合点で、同時にバネ支持の機構(枝状結合)とすれば、MBD 問題の機構を表している。

したがってこの技法が、本稿コンセプトを提示する切っ掛けともなっている。

2. 基本的技法

(1) 状態ベクトル

状態ベクトルは $\{u, \nabla F\}$ と $\{u, \nabla u\}$ を用意する、とした。

一般の力学書では、いきなり τ_{ij} , 或いは σ_{ij} で法線応力とせん断応力を、並列に説明する。

dHd の観点では、先ず法線応力を説明し、法線応力の横変化分がせん断応力として作用する、と説明できる。

三次元(3D)の六面体で説明すれば(四面体でも同じ)、要素間境界面法線方向は状態ベクトル $\{u, \nabla F\}$ を使って{変位, 法線応力}を連続させ、接平面方向は状態ベクトル $\{u, \nabla u\}$ を使って{変位, ひずみ}を計算する。

後者の法線応力は接平面に平行であり、同じ要素内で連続するので、その横変化分がせん断力として、要素間に作用する。

したがって、異種材料の要素間せん断応力は容易に計算可能で、不連続ひずみもそれぞれの要素で容易に計算できる。

同一材料間では従来どおり、 $\{u, \nabla u\}$ を使って計算し、応力はひずみに剛性を乗じて表せる。(上述の方法で計算しても、同じ結果を得る。逆は不可。)

(2) 3Dの2D,1Dへのモデル化とLocking-free法

3D変位ベクトル $\{u, v, w\}$ の (x-y) 2D へのモデル化は、 z 方向には周期境界の剛体 $\partial w^\# / \partial z = 0$ として、 $\{u, v, w^\#\}$ で表す。(x-y) 平面内では $\nabla w^\# \neq 0$ であり、 $H-d$ では $\nabla w^\# \equiv \nabla \Psi_3 \equiv \nabla \Psi$ で表す。($w^\# = \text{curl} \psi$ で表し、 ψ を流れ関数と呼ぶ。)

更に、2Dの1Dへのモデル化は、 y 方向周期境界の剛体 $\partial v^\# / \partial y = 0$ として、 $\{u, v^\#, w^\#\}$ または $\{u, v^\#\}$ で表す。

せん断変形 $\langle \partial u / \partial y + \partial v^\# / \partial x = 0 + \partial v^\# / \partial x = \theta \rangle$ で表すのがTimoshenkoはりモデルであるが、平面保持仮定(Bernoulli-Navierの仮定)による傾角 $\theta = \partial(y\theta) / \partial y$ とは

異なるので、Timoshenkoばりは $\partial v^{\#}/\partial x \equiv \partial \Psi/\partial x$ で表して、2自由度数 (θ, Ψ) で計算して行く。[9]

上述は2Dの、Mindlin-Reißner板曲げモデルにも適用できる。

MBD計算でも、自由度を確保するLocking-free法として不可欠である。

(3) スカラーポテンシャル Φ による自然座標系表示

自然座標系は、流線(粒子の流れ線)上の粒子(スカラーの質点)を Φ で表し、その移動(変位)を、一般には(MBDでは)空間固定点からの観測値で表す円筒・極座標系を用いる。

dHd ではスカラーポテンシャル Φ を流通座標で表し、変位は流通座標増分で表す。(i.e.; $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{X}$.)

シミュレーション初期(静止時)の粒子座標値 $\mathbf{X}_p$ は、当該粒子のデカルト座標値(局所原点 $\mathbf{X}_0$ からの距離)。

圧縮・非圧縮に拘わらず非圧縮計算は不可欠なので、以下は非圧縮で示す。

1の粒子の変位 $\mathbf{u}$ は $\Delta \Phi \nabla \Phi$ ($\nabla^1 \Phi = 0$) で表す。($\Delta \Phi$ は増分。)

有限要素内は複数の粒子で表す。それらを有限要素関数で補間して、連続体表示する。

かつ有限要素手法で、頂点ノード k のパラメータ $\{\Phi\}_k$ で表し、要素間連続条件を満たして行く。

ただ、変位 $\mathbf{u}_i$ は、要素間界面に並行方向は適合するが、法線方向は非適合となる。

そこで、法線方向は $\mathbf{F} (\equiv \mathbf{G}\Phi)$ (要素)を用いて、 $\{\mathbf{F}\}_k$ で(応力の不連続残差を)変分して行く。(混合変分法)

(4) スカラーポテンシャル Φ の運動方程式と離散化

外力荷重下の Φ の運動方程式は式(1)で表される。

$$\frac{D\Phi}{Dt} - G\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

時間ステップを $n = 0, 1, 2, \dots$ とし、時間ピッチを Δt とし、先ず n 断面の変位分布をgivenとし、 $(n+0)$ で速度項を、 Φ^{n+1} を未知数として、式(2)で計算する。

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} + (\Phi \nabla \Phi)^n - G(\nabla^2 \Phi)^n = 0 \quad (2)$$

初期値は静止状態とし $(n+0) = (0+0)$ での計算結果は、 $\Phi^{n+1} = 0$ 分布となる。

次いで時間ステップを進めて $n=n+1$ で更新し、 $(n-0)$ で、速度分布をgivenとし、応力項で n 断面の変位分布を、式(3)で計算する。

$$\frac{\Phi^n - \Phi^{n-1}}{\Delta t} + (\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})^{n-1} - G(\nabla^2 \Phi)^{(n-0)} = 0 \quad (3)$$

上述2ステップを、望みの状態になるまで反復計算して

行く。(なお、増分: $\Delta \Phi = \Phi^{n+1} - \Phi^n$.)

ただし、式(2)で計算した予測子 Φ^{n+1} は、Coulombゲージ $\nabla^1 \Phi^{n+1} = 0$ を満たしてはいくならない。

それを $\text{imi } \Phi^{n+1} = 0$ で表して、鏡面像で計算して行く。

計算法は、式(1)の制約式(最小2乗)として同時に解く陰的解法と、事後に満たす陽的解法とあるが、前者の方を勧める。

計算法は ϕ 要素を介する方法(MAC法も同じ)による。

(5) 共役変数の概念

Helmholtz分解はCoulombゲージ($\text{div} \psi = 0$)を制約条件とする。変位ベクトル場では体積保存式である。

2Dでは変位増分の和: $(\Delta u + \Delta v = 0)$ を要求するが、それぞれに、桁落ち $|e|$ を含んだ $((\Delta u + e) + (\Delta v - e) = 0)$ であっても、2DのCoulombゲージを満たす解である。

$|e|$ を排除するため $((\Delta u + e) - (\Delta v - e) \Rightarrow 0)$ を同時に制約条件として、 $(2e \Rightarrow 0)$ とする。

それを共役変数の概念で一般化し、 $(A+B)$ の演算には $(A-B)$ を最小化すべし、とし、 $(A+B)$ と $(A-B)$ を共役変数と呼んでいる。

(6) 横成分に関する計算法について

上述までは、主として縦成分の計算法である。粒子自体は更に自転し、かつせん断変形 $\Phi^{(11)}$ 分小さな公転をする。

それら横成分に関しては、MBD適用の適当な(特別な)具体例で示す必要があり、本稿では省略する。

3. 数値計算例

(1) 計算例1:

“マルチボディシステム“でネット検索の結果、図1の解析例(計算結果は動画)があり、初心者への理論も丁寧、かつ平易に解説されている。

計算例の数式も示されているので、好例として本稿モデルでの再現方法を示す。

本モデルでの数式を示すもので、直接の突き合わせはできないが、スキームのシンプルさを示す目的で示す、ものです。

(2) 有限要素

(変位・ひずみ)要素 と (変位・応力)要素を用意する。

質点を重心に置き $\{\Phi\}_0$ とする。頂点ノードパラメータを $\{\Phi\}_k$ で表す。

双2次要素とし、辺方向を s とし、 $\{\partial^2 \Phi / \partial s^2\}_m$ を中間ノードのパラメータとする。

重心ノードのパラメータは、一般に用いる $\{\Phi\}_0$ ではなく、 $\{\partial^2 \Phi / \partial x \partial y\}_0$ とする。($\{\Phi\}_0$ は従属的に計算する。)

かつ、剛体: $\langle \{\partial^2 \Phi / \partial s^2\}_m = 0, \{\partial^2 \Phi / \partial x \partial y\}_0 = 0 \rangle$ とする。

したがって、頂点ノードの自由度で計算して行く。(双1次要素の自由度数に同じ。)

要は、双2次に対応する状態ベクトルを得るためである。

で計算できる。(ノード番号を $k=0, 1, 2$ で順に表す。)

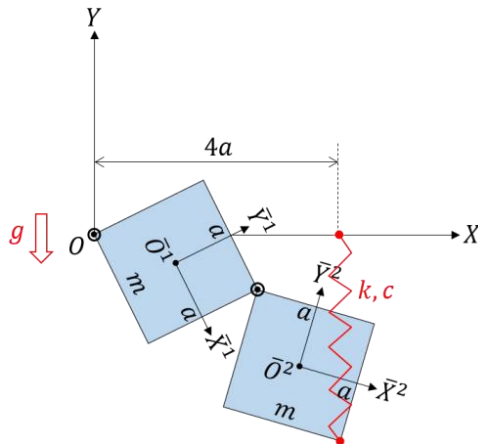
(3) 境界条件

ピン支持点: ($\{\Phi\}_k = 0$) , バネ支持点: ($K\{\Delta\Phi\}_k \Phi^{(01)}$) のバネ反力, が働く, ただし, 減衰力: $C\{\Delta\Phi\}_k \Phi^{(01)}$ が同時に働く, とする。

要素間のピン結合点では ($\{\Phi\}_k$) を共有する。

<https://www.sky-engin.jp>

マルチボディダイナミクス超入門 | スカイ技術研究所ブログ



辺の長さが $2a$, 質量が m の均質な正方形の剛体が2つ, 図のように2つの回転ジョイントと1本のバネダンパで接続され, 各物体には負のY方向に重力加速度 g の重力が働くものとします。

図1 数値計算例

(4) 有限要素法で連立方程式解法

Φ は速度要素とし, 変位は Δt を乗じて計算する。(バネ反力: $\Delta t K\{\Delta\Phi\}_k \Phi^{(01)}$, 減衰: $C\{\Delta\Phi\}_k \Phi^{(01)}$)

連立方程式を組んで解く方法では, 先ず式(4)で, 加速度項分子の $\Delta\Phi$ を計算する。($\rho = 1$ で基準化表示。)

$$\int_{\Omega} [\delta\Phi \cdot (\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} - g + (\Phi \nabla \Phi)^n - \nabla^2 F^n) + \delta \nabla \Phi \cdot \nabla F^n] d\Omega = 0 \quad (4)$$

式(4)による予測子はCoulombゲージ $\langle \nabla^1 \Phi^{n+1} = 0 \rangle$ を満たしている必要がある。

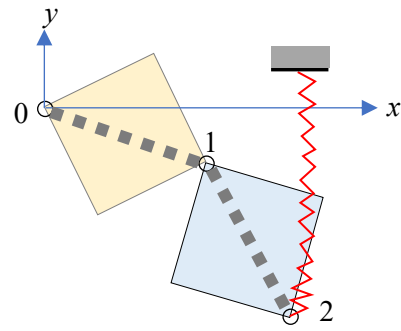
そこで, 陽解法では, 予測子 Φ^{n+1} を式(5)で反復修正する。(m は反復回数: $m=0, 1, 2, \dots$)

$$\int_{\Omega} [\delta \nabla \Phi \cdot (\nabla \Delta \Phi^{n+1} + \frac{1}{2} (\nabla^1 \Phi^{n+1})^{m-1})] d\Omega = 0 \quad (5)$$

反復計算し, 収束すれば時間ステップを進める。

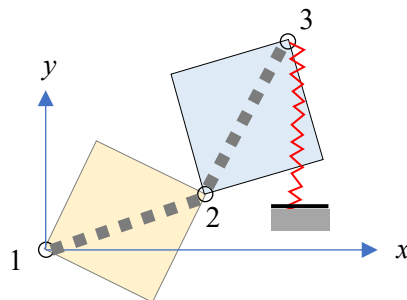
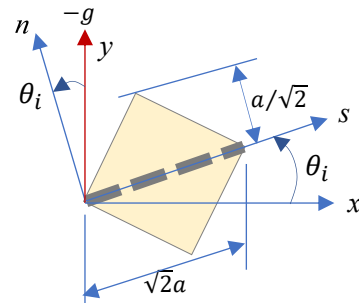
(5) 遷移行列法による解法

本モデルは開いた系(連続桁)なので, 遷移行列法のみ



剛体連続桁の遷移行列モデル

θ_i が正の姿勢の記号を次に示す。(例ではこの $+\theta_i$ の状態は生じない。)



剛体連続桁の遷移行列モデル

たわみ方向を z 軸, たわみを w とし, 材軸方向を x, u で表す。

重力 ρg は桁に, 三角形分布で掛かるので, 5次関数の要素が必要である。

開いた系へ $\{u, v, w\}$ で表す遷移行列法は, 3次元曲線桁(インターチェンジの高速道路桁など)などへの適用でも完成している。

ここではそれを Φ 要素で表す方法に翻訳するものである。(ただ

近時, MBDへの $\{u, v, w\}$ で表す遷移行列法の移転は, 殆どなされていないことを知った。)

連続桁計算ではたわみ w を変数にするが, dHd では Φ を流通座標表示するので, $w = \Delta\Phi \Phi^{(01)}$ で表す。

軸方向は $u = \Delta\Phi\Phi^{(10)} = 0$ である。

状態ベクトルと、剛体の遷移行列を次に示す。

$q^{(0)}$ は単位長さ当りの等分布荷重量, $q^{(1)}$ は三角形荷重の単位当たり長さの z 方向増大量. $p^{(0)}, p^{(1)}$ は軸方向. いずれも pg から計算する。

$$\text{状態ベクトル: } \{\mathbf{Z}_1\} = \begin{Bmatrix} w^{(0)} \\ w^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F^{(3)} \\ q^{(0)} \\ q^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{Z}_2\} = \begin{Bmatrix} u^{(0)} \\ F^{(1)} \\ p^{(0)} \\ p^{(1)} \end{Bmatrix}$$

以下, $\{\mathbf{Z}_1\}$ に関して示す. かつ, $\{\mathbf{Z}\}$ で表す. $\{\mathbf{Z}_2\}$ は同様とし, 省略する。

$$\text{遷移行列は } \{\mathbf{T}\} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ピン支持点1から前進計算する。(連続桁の遷移行列法は確立されているので, 概要を示す。)

まず, 状態ベクトルに境界条件を考慮して, 次式で表す。

$$\text{ノード0で: } \{\mathbf{Z}\}_0 = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ w^{(1)} \\ F^{(2)} \\ 0 \\ q^{(0)} \\ q^{(1)} \end{Bmatrix}_0$$

上式を縮約する。(残る状態ベクトル成分を, 未知ベクトル2つ $\{U_1 = w^{(1)}, U_2 = F^{(2)}\}$, として表す。)

$$\text{ノード0で: } \{\mathbf{Z}\}_0 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 0 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ q^{(0)} \\ q^{(1)} \end{Bmatrix}_0$$

ノード1へtransferする。(実際には, 三角形荷重が2つ続くので, 2回transferする。)

$$\begin{aligned} \text{ノード1で: } \{\mathbf{Z}\}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 & x^3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{Z}\}_0 \\ &= \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ q^{(0)} \\ q^{(1)} \end{Bmatrix}_0 \end{aligned}$$

ノード1のピン結合条件: $\{0,0,0,1,0,0\} \cdot [A]\{\mathbf{U}\}_0 = 0$ で, 未知数 $\{U_1, U_2\}$ の1つを消去する。(絶対値最大のpivotの未知数を消去。)

消去した未知数に替り, $\Delta\theta = \Delta w^{(1)}$ を新しい未知数成分とする。(状態量ベクトルの $w^{(1)}$ 行を $w^{(1)} + \Delta w^{(1)}$ >で置き替える。)

同様にしてノード2へtransferし, 境界条件を与える。

境界条件はモーメントゼロの条件と, せん断力が鉛直変位に比例するバネ反力に等しい, である。

よって未知数ベクトルの値が確定するので, 後退計算してすべての解を得る。

本問題ではノード座標値を更新し, 収束するまで反復計算する。(有限変形理論。)

収束すれば時間ステップを進める。

4. まとめと今後の課題

MBDや粒子法では, 自然座標系は円筒・極座標で表すのが一般であるが, デカルト座標表示に揃える方が, いろいろと都合が良い, として遷移行列表示法を示した。

要は, 剛性無限大のカップリングが表せればよい。

粒子法は一般に, 自由界面問題を対象とし, いわゆる渦なし流れを扱う。

閉空間問題も粒子法のLagrange型(流線座標系)で, かつ流通座標で計算する方法を, 離散Helmholtz分解に基づき提示した。

本稿では, 渦なし流れの数値計算技法を, MBDへ移転する技法を提示した。

MBDは一般には, Φ で表す公転を対象とするが, 更に繊維や複雑な問題へも適用されつつあるので, Ψ で表す小さな公転や自転, のすべての分解表示を活用する時代が来ると考える。

その基礎的技法は既に関係している。

今後の課題はそのニーズの開拓に在る。

[付録1] 離散Helmholtz分解(dHd)表示法

任意のベクトル場 $\mathbf{V}$ を, 次式で分解表示する。

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi^C + \nabla^1\Psi \quad (\text{div}\Psi = 0, \nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi) \quad (a)$$

$\nabla\Phi$ は縦成分の内の, 非圧縮成分であり, $\nabla\Phi^C$ は圧縮・膨張成分である。($\nabla^1\Phi = 0, \nabla^1\Phi^C \neq 0$)

$\nabla_{diag}\Psi$ は, $\nabla\Psi$ の対角成分を表すとする。Coulombゲージにより自明であるが, 念のため ($\nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi$) とした。

$\nabla^1\Psi$ は, 総和規約に従う表示 $\partial\Psi_i/\partial x_j$ を表す, とする。すなわち $\nabla\Psi$ の行和で表すベクトルである。

$\mathbf{V}$ はひずみベクトル場を表すとして, 変位ベクトル場 $\mathbf{u}$ は次式で表す。

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi^C + \nabla^1\psi \quad (\text{div}\psi = 0, \nabla_{diag}\psi = \nabla\varphi) \quad (b)$$

更に, ポテンシャルベクトル場 ψ は次式で表すとする。

$$\psi = \nabla v^C + \nabla^1\lambda \quad (\text{div}\lambda = 0, \nabla_{diag}\lambda = \nabla v) \quad (c)$$

$\Phi^C = \nabla^2 v^C, \Phi = \nabla^2 v$ などの関係が在る。

他のベクトル場も, 同様に表示して行く。

[付録 2] 流線上移動粒子の流通座標表示と回転

Φ は流通座標で表し、モデル粒子の Φ は、流れ場では流線上に在る。(定義では、質量粒子の軌跡が流線.)

Φ は流線の長さであり、流通座標値の変化は $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{u}$ である。

ここでは固体のベクトル場も表す意味を込め、かつ離散表示する意味も込めて、流線を“粒線”とも呼ぶ、とする。

つまり、1 粒子の Φ の Lagrange 座標を流通座標で表す。或いは 1 粒線を流通座標で表す。

粒子-メッシュ法では、粒線群を流通座標表示し、粒線群を、有限要素関数で補間して連続表示する。

粒線の接線方向、および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を、粒線座標 (Lagrange 座標) とすれば、横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力としても表れる。

ただ、粒子の自転は接線軸周りのみではなく、他の軸周りもある。そこで $\text{curl} \Psi$ も流通座標で表す。

1 粒子の流通座標を $\mathbf{X}_p$ で表し、初期(静止時)座標を $\mathbf{X}_0$ で表すとする。

$\nabla \Phi$ も流線座標で表した勾配となる。

dHd では $\nabla \Phi = \nabla_{diag} \Psi$ で表すとした。 Φ のデカルト座標上の増分である。つまりは方向余弦であり、 Φ は非圧縮を表すとしているので、 $\nabla^1 \Phi = 0$ である。

$\nabla \Phi$ は法線ひずみ(のデカルト座標表示)であり、相対量である。

静止時からの Φ の、方向別増分は $\Phi \nabla \Phi$ である。

時間ピッチ Δt 間の増分を $\Delta \Phi$ とすれば、 Δt 間の流通座標の増分: $= \mathbf{u}$ (非圧縮変位) であり、 $\mathbf{u} = \Delta \Phi \nabla \Phi$ である。

体積変化の増分は $\Delta \Phi^c \nabla^1 (\Phi + \Delta \Phi^c)$ とし、一般解 $\nabla^1 \Phi = 0$ を加えて表す。

$\Delta \Phi \nabla \Phi$ は座標回転して $= \mathbf{u}(s, n, \zeta)$ (:非圧縮, Lagrange 座標. s が接線方向.) でも表す。

dHd では $\nabla_{diag} \Psi = \nabla \Phi$ と定義したので $\Delta \Phi \nabla_{diag} \Psi = \mathbf{u}$ であり、 Ψ の Taylor 展開 1 次の項 $\langle \Delta \mathbf{X}_p \cdot \nabla \Psi \rangle$ を速度表示 $\langle = \Delta t \Psi \cdot \nabla \Psi \rangle$ して、縦成分 $\langle = \Delta t \Psi_i \nabla_{diag} \Psi \rangle$ に着目すれば、 $\langle \Delta t^2 \Phi^2 = \Delta t^2 (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2) \rangle$ であり、 Φ は接線方向速度である。

(速度 Φ の) $\Delta t \Phi \nabla \Phi$ が $\Delta \mathbf{X}_p / \Delta t = \mathbf{u}_p / \Delta t$ である。

デカルト (Eulerian) 座標型では $\langle \mathbf{U}_i = \Psi_j \nabla \Psi_i \rangle$ であり、非定常では加速度項を加えて物質微分表示する。

流線 (Lagrangian) 座標型でも、流通座標表示では、同様である。

粒子自身は $\text{curl} \Psi$ 分自転する。正確には $\text{shr} \Psi$ 分小さく公転しながら自転する。

$\Delta \Phi \nabla \Phi = \mathbf{u}$ は流通座標で表示するとしたが、変位に追従して表す座標(粒線座標)であり、固体では有限変形理論の変位に追従して表す“有限変位座標”とも呼べよう。

有限変位座標表示の有限変位ベクトル $\Delta \Phi \nabla \Phi$ は、非線形であることに留意する。

準静的载荷の仮想時間 Δt 後には、時間ステップを $n = 0, 1, 2, \dots$ として、 $\mathbf{u}^{n+1} = (1 + \Delta t)(\Delta \Phi \nabla \Phi)^n = (\Delta \Phi \nabla \Phi)^{n+1}$ であり、離散計算では仮想時間 Δt は小さいほど、当然乍ら、粒線を精度高く表せる。

任意のベクトル場を表すとする dHd では、 $\mathbf{u} = \nabla^1 \psi$ である。(ただし, in case ($\text{div} \psi = 0$).)

渦度の表示に関しては次の通りである。

上述で、回転 $\text{curl} \Psi$ もデカルト座標で表すとした。

$\text{curl} \Psi_3$ が x - y 鏡面上の、流れ関数表示の渦度である。

ただし、 Ψ_3 は本来 3D 表示であり、2D では z 軸方向は剛体 ($\partial \Psi_3 / \partial z = \partial w^{\#} / \partial z = 0$) であるが、スライスした x - y 鏡面上の像は z 軸方向に、パラパラ漫画の如く変動する。それを、小さく公転しながら自転する、と表現した。

3D の $\partial \Psi_3 / \partial z \neq 0$ 分が公転で、 $\langle \partial \Psi_3 / \partial y - \partial \Psi_3 / \partial x \rangle$ 分が自転(渦度・剛体回転)である。

地球の公転が粒線とすれば、月は地球の周りを小さく公転しながら、自転する、と考える。

小さな公転を $\text{shr} \Psi$ で表し、自転を $\text{curl} \Psi$ で表示するものである。(月の裏側は、地球からは見えない。)

かつ、 Ψ_3 の z 軸周り x - y 鏡面像のみではなく、 Ψ_1, Ψ_2 の小さな公転・自転も在り、複雑に回転する。

参考文献

- [1] 例えば、数学ハンドブック p.p.258, 丸善, 1960.
- [2] Falk, S.: Die Berechnung offener Rahmentragwerken nach dem Reduktionsverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.61-80.
- [3] Falk, S.: Die Berechnung geschlossener Rahmen-tragwerken nach dem Reduktionsverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.96-109.
- [4] R. Kersten 著, 伊藤学訳: 構造力学における還元法, 技法堂, (1968).
- [5] 成岡, 遠田: 伝達マトリックス法, コンピュータによる構造工学講座 I -2-B, 培風館, (1970).
- [6] 今村: 有限要素混合変分法: 准 C^1 連続な有限要素法, 計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [7] 越塚誠一: 数値流体力学, p.p.185, 培風館, 1997.
- [8] 今村: 海上交通評価のための人口航跡作成法の一案, 日本航海学会論文集, vol.76, p.p.1-10, 1993-3
- [9] 今村: 離散 Helmholtz 分解 (dHd) 表示に基づく Mindlin 板理論・ティモシェンコはり理論の考察と精解モデルの提案, 理論応用力学論文集, 2022.