

# B-spline 関数を導入した重合メッシュ法の開発と検証

## Development and Verification of B-spline Based S-Version of Finite Element Method

馬込望<sup>1)</sup> 森田直樹<sup>2)</sup> 三目直登<sup>3)</sup>

Nozomi Magome, Naoki Morita and Naoto Mitsume

<sup>1)</sup>筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail:

magome.nozomi.sw@alumni.tsukuba.ac.jp)

<sup>2)</sup>博 (環境) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: nmorita@kz.tsukuba.ac.jp)

<sup>3)</sup>博 (工) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

s-version of finite element method (SFEM) has intrinsic strengths in local high accuracy with low computational costs and simplicity in the meshing procedure. It, however, has challenges in the accuracy of numerical integration and matrix singularity. In this paper, we summarize these problems and present strategies for solving them. As a concrete solution, we propose B-spline based SFEM, in which cubic B-spline basis functions are applied to the global basis functions, and Lagrange basis functions are applied to the local basis functions. The numerical results show that B-spline based SFEM can be computed with sufficient accuracy using the standard Gaussian quadrature, and the proposed method is superior to the conventional method in terms of convergence of an iterative method.

**Key Words** : s-version of finite element method, mesh superposition method, B-spline basis functions

### 1. 序論

Fish[1] が提案した重合メッシュ法 (s-version of finite element method: SFEM) は、解析領域全体を粗く離散化するグローバルメッシュと、任意局所領域を精緻に離散化するローカルメッシュを重ね合わせて解析を行う手法である。重ね合わせるメッシュはそれぞれ独立に定義可能であり、局所的な特徴はローカルメッシュによってのみモデル化される。ゆえに重合メッシュ法はメッシュ生成コストが低く、かつ柔軟にメッシュ細分化可能であり、計算コストを抑えつつ局所領域を高精度に計算可能であるという利点を持つ。重合メッシュ法はこれまで積層複合材料の応力解析 [2] や繊維強化複合材料のマルチスケール解析 [3], 動的亀裂伝播解析 [4,5] 等様々な問題に適用され成功を収めている手法と言える。

一方で、重合メッシュ法には2つの問題がある。1つは重合メッシュ法特有の部分係数行列の数値積分精度である。これは、従来の重合メッシュ法の基底関数として一般的に使用される Lagrange 基底関数が要素境界で  $C^0$  連続性しか持たないことに起因しており、メッシュの重なり方によっては被積分関数が不連続となるため、通常のガウス求積法では十分な精度で数値積分を行うことができなくなる。積分精度を上げるために、積分領域の細分化手法や通常より高次のガウス求積法が適用されてきた [6,7] が、それらの手法はいずれも計算コストが高く、重合メッシュ法の利点を損なうものである。もう1つの問題は、各メッシュの基底関数の線形独立性が保証されていないことである。このため構築するメッシュ次第で解くべき連立一次方程式の係数行列が特異となり、行列計算において反復解法を用いた場合に解が収束しないか、収束が非常に遅くなることが指摘されている [8]。

本研究では、基底関数に要素境界での連続性の高い B-spline 基底関数を適用しつつ、両メッシュに異なる基底関数を適用することで、これらの課題の抜本的な解決を図る。提案手法と従来手法を3次元 Poisson 方程式に適用して、精度と行列計算の反復回数の点から検証を行う。なお本研究は、構造格子を用いた界面捕捉型の流体解析や連成解析に対し、局所的な高精度化を実現するための基礎的検討の位置付けである。そのため、グローバルメッシュは構造格子であることを前提とし、手法の定式化と検証を実施する。

### 2. 重合メッシュ法の概要

重合メッシュ法による解析では、図1のように粗さの異なるメッシュを重ねて対象を離散化する。全体領域  $\Omega^G$  を粗く離散化するメッシュをグローバルメッシュ、局所領域  $\Omega^L$  を精緻に離散化するメッシュをローカルメッシュと呼ぶ。 $\Omega^G$  の境界  $\Gamma$  は Dirichlet 境界条件が課される境界  $\Gamma_1$  と Neumann 境界条件が課される境界  $\Gamma_2$  に分けられる。重合メッシュ法において、物理空間上の関数解  $u(\mathbf{x})$  は式 (1) で表される。

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^G(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega^G \setminus \Omega^L \\ u^G(\mathbf{x}) + u^L(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega^L \end{cases} \quad (1)$$

$$u^G(\mathbf{x}) \simeq \sum_{i=1}^{n_{\text{gn}}} N_i^G(\mathbf{x}) u_i^G, \quad u^L(\mathbf{x}) \simeq \sum_{j=1}^{n_{\text{ln}}} N_j^L(\mathbf{x}) u_j^L$$

$u^G(\mathbf{x})$  および  $u^L(\mathbf{x})$  はそれぞれグローバルメッシュ、ローカルメッシュで独立に定義される関数解であり、その基底関数  $N_i^G(\mathbf{x})$ ,  $N_j^L(\mathbf{x})$  には異なる関数を適用することが可能である。すなわち、2つのメッシュは独立かつ任意に生成でき、メッシュの整合性を気にせず任意の空

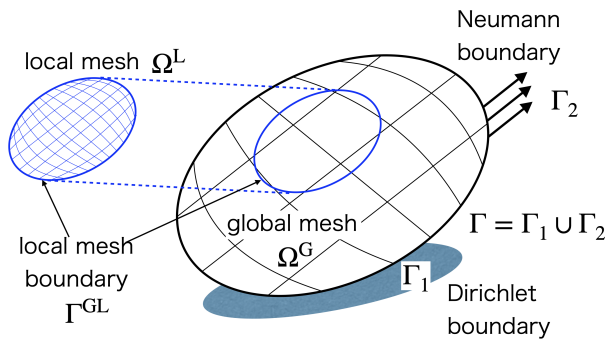


図-1 Global and local meshes defined in SFEM.

間解像度を設定できるため、メッシュ生成が簡便である。  $n_{gn}, n_{ln}$  は基底関数  $N^G(\mathbf{x}), N^L(\mathbf{x})$  の数であり、  $u_i^G, u_j^L$  は基底関数  $N_i^G(\mathbf{x}), N_j^L(\mathbf{x})$  に対応する係数である。境界  $\Gamma^{GL}$  上での関数解  $u(\mathbf{x})$  の連続性を保証するため、式 (2) で表される Dirichlet 境界条件を課す。

$$u^L(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (2)$$

対象とする支配方程式が線形である場合、上式を、支配方程式の重み付き残差方程式に代入することで、解くべき連立一次方程式 (3) が導出される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{GG} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^G \\ \mathbf{u}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{bmatrix} \quad (3)$$

式 (3) において、上付き文字 G, L はそれぞれグローバルメッシュ、ローカルメッシュに関連することを示す。行列  $\mathbf{K}^{GG}, \mathbf{K}^{LL}$  はそれぞれグローバルメッシュおよびローカルメッシュで定義される従来の有限要素法の係数行列と同一である。一方、行列  $\mathbf{K}^{GL}, \mathbf{K}^{LG}$  は2つのメッシュの相互作用を表し、被積分関数には  $N^G(\mathbf{x})$  と  $N^L(\mathbf{x})$  の両方が含まれる。

### 3. B-spline 重合メッシュ法

#### (1) Lagrange 基底関数を用いた従来型重合メッシュ法

従来型重合メッシュ法においては、全てのメッシュに対して Lagrange 基底関数を用いられてきた。本章では、Lagrange 基底関数の特徴と、従来型重合メッシュ法の問題点を述べる。

正規要素座標を  $\hat{\xi}$  とすると、1次元の正規要素  $\tilde{\Omega}^e$  における Lagrange 補間関数は式 (4) で与えられる。

$$l_i^p(\hat{\xi}) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_j}{\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_j} \quad (4)$$

ここで、  $i = 1, 2, \dots, p+1$  は要素内基底番号、  $p$  は関数の次数、  $\hat{\xi}_i$  は節点  $i$  の正規要素座標である。また、要素内の節点数は  $n = p+1$  で表され、正規要素  $\tilde{\Omega}^e$  の区間が  $[-1, 1]$  で定義されることから  $\hat{\xi}_1 = -1, \hat{\xi}_{p+1} = 1$  となる。  $p$  次の Lagrange 基底関数は、  $p$  次の Lagrange 補間関数  $l_i^p$  から構成される。

図2に1次、2次、3次の Lagrange 基底関数の一例を示す。図に示すように、Lagrange 基底関数は、要素内

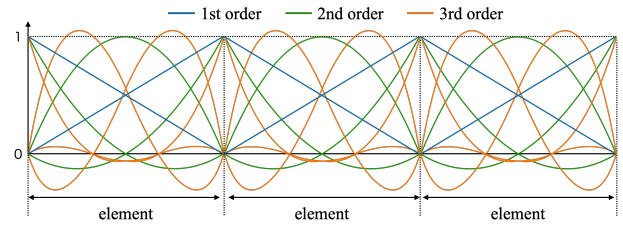


図-2 Linear, quadratic and cubic Lagrange basis functions.

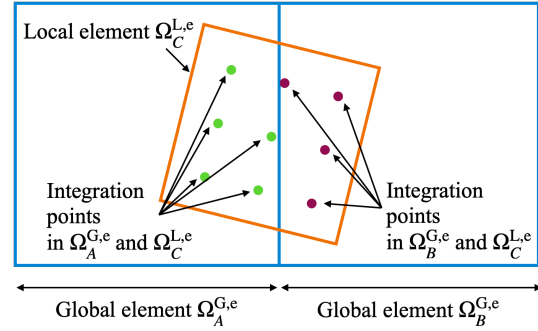


図-3 An example of mesh superimposition that causes the inaccurate quadrature.

部では関数次数に応じて高い連続性を持つが、要素境界では常に  $C^0$  連続であり、基底関数の一階微分値は要素境界で不連続となる。この特徴ゆえに、従来型重合メッシュ法においては、行列  $\mathbf{K}^{GL}, \mathbf{K}^{LG}$  の数値積分の精度が悪化する。

従来型重合メッシュ法には2つの課題が存在する。1つは、行列  $\mathbf{K}^{GL}, \mathbf{K}^{LG}$  の数値積分精度である。この問題は、図3のように、グローバルメッシュとローカルメッシュが部分的に重なるときに生じる。図3では、ローカルメッシュ上の要素  $\Omega_C^{L,e}$  を積分領域としており、被積分関数には、要素  $\Omega_C^{L,e}$  内の基底関数およびその微分値に加え、グローバルメッシュ上の要素  $\Omega_A^{G,e}$  に重なっている領域では要素  $\Omega_A^{G,e}$  内の基底関数およびその微分値が、グローバルメッシュ上の要素  $\Omega_B^{G,e}$  に重なっている領域では要素  $\Omega_B^{G,e}$  内の基底関数およびその微分値がそれぞれ含まれる。前述のとおり Lagrange 基底関数は要素境界をまたいで  $C^0$  連続であり、一階微分値は不連続である。すなわち被積分関数が積分領域内で不連続となる。数値積分で一般的に使用されるガウス求積法はそのような不連続関数を正確に計算することができないため、積分精度が悪化する。

この問題に対して、数値積分の高精度化のために様々な手法が提案されてきた。Fish et al. [6,9] は厳密な積分のために、不連続面に沿ってグローバルメッシュ上の要素を分割し、細分化された各領域に対しガウス求積法を適用した (図4(a))。この手法は正確な数値積分を達成する一方で、非常に複雑な幾何学的処理と多大な計算コストを要したため、積分領域を一樣 [10] もしくは再帰的 [11] に分割することで、不連続関数による精度悪化の影響を低減する手法も提案されている (図4(b), (c))。また、メッシュの細分化は行わず、通常よ

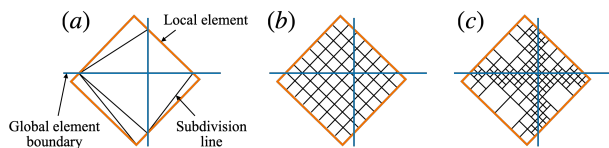


図4 Examples of existing mesh-subdivision approaches for discontinuous integrands.

りも高次のガウス求積法を適用した例もある [1,7]. しかしながら, いずれの手法も通常のガウス求積法を適用した場合より非常に大きな計算コストを必要としており, このような特別な工夫なしに通常のガウス求積法を適用可能な重合メッシュ法が求められている.

従来型重合メッシュ法のもう一つの課題は, 各メッシュの基底関数の線形独立性が保証されていないことである. 重合メッシュ法における解は式 (1) によって定義されるが, 片方のメッシュの基底関数が他のメッシュの基底関数の線形和で表現される場合, 式 (1) の分割が一意でなくなり, 解の一意性が失われる. すなわち係数行列が特異行列もしくはそれに近い状態となり, 反復法において解が収束しなかったり, 収束性が悪化することが指摘されている [8]. 特に解が収束しない状況は, グローバルメッシュの要素境界とローカルメッシュの要素境界が一致するようにメッシュが重なっている場合に多く生じており, 特異行列を回避するために, グローバルメッシュの要素境界上にあるローカルメッシュ節点の自由度を削除する手法が採用されてきた [12,13]. しかしそれらはモデルを少し修正するのみの暫定的な処理に留まっている.

## (2) B-spline 重合メッシュ法による課題の解決

本研究では, 前章で指摘した従来型重合メッシュ法の問題点を根本的に解決可能な, B-spline 重合メッシュ法を提案する. 本章では, B-spline 基底関数の特徴および具体的な課題解決方法としての B-spline 重合メッシュ法について述べる.

B-spline 基底関数はノットベクトルによって定義される. ノットベクトル  $\Xi$  は式 (5) で表されるように, パラメータ空間における座標の非減少な集合である.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_k}\}^T \quad (5)$$

このとき,  $\xi_i \in \mathbb{R}$  は  $i$  番目のノット,  $n_k$  はノットベクトル中のノットの数であり  $n_k = n_c + p + 1$  と表される. また,  $p$  は B-spline 基底関数の次数,  $n_c$  は幾何形状である B-spline 曲線を構築するのに使われる B-spline 基底関数の数である. 与えられたノットベクトルに対して, B-spline 基底関数は 0 次の区分定数で始まる漸化式として定義される. 区分定数の関数の定義を式 (6) に示す.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6)$$

式 (6) より, 0 次の B-spline 基底関数は, パラメトリック区間  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  で定義される要素において 1 をとり, そ

れ以外の区間においては値を持たないことがわかる. 次数  $p = 1, 2, 3, \dots$ , において, パラメータ区間  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$  で定義される  $p$  次 B-spline 基底関数  $N_{i,p}(\xi)$  は, Cox-de Boor の漸化式 (7) で表される.

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

B-spline 基底関数の一階微分値は式 (8) で与えられる.

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (8)$$

$\mathbb{R}^d$  空間の幾何形状である B-spline 曲線は, 従来 FEM と同様に B-spline 基底関数の線形結合で構築される. また, 多次元パラメトリック基底関数への拡張は, 1 次元パラメータ空間における B-spline 関数のテンソル積として定義できる. ベクトル値係数であるコントロールメッシュ  $B_{i,j,k} \in \mathbb{R}^d (i = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, m_c; k = 1, 2, \dots, l_c)$ , 多項式次数  $p, q, r$ , ノットベクトル  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_k}\}^T$ ,  $\mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m_k}\}^T$  および  $\mathcal{Z} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{l_k}\}^T$  が与えられたとき,  $\mathbb{R}^d$  空間の B-spline ソリッド  $S(\xi, \eta, \zeta)$  は式 (9) で定義される.

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_c} \sum_{j=1}^{m_c} \sum_{k=1}^{l_c} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (9)$$

ここで,  $N_{i,p}(\xi)$  はノットベクトル  $\Xi$  で定義される  $p$  次 B-spline 関数,  $M_{j,q}(\eta)$  はノットベクトル  $\mathcal{H}$  で定義される  $q$  次 B-spline 関数,  $L_{k,r}(\zeta)$  はノットベクトル  $\mathcal{Z}$  で定義される  $r$  次 B-spline 関数であり,  $i, j, k$  はそれぞれ  $\xi, \eta, \zeta$  方向に対応する成分インデックスである. なお, コントロールメッシュは解析対象の幾何的形状と一致しないため, 従来の Lagrange メッシュの生成方法は適用できない. 本研究では, Otoguro et al. [14] のメッシュ生成手法を採用している. また, 本研究ではオープンノットベクトルのみを採用し, B-spline 基底関数が定義される区間の両端で補間特性を満たすとした. 一方で, B-スプラインの基底関数は, 内部のノットでは補間特性を満たさない. よって, 本研究では Dirichlet 境界に属するコントロールポイント値を定数として, Dirichlet 境界条件を課す. 加えて, B-spline 基底関数に基づく解析手法も, Lagrange 基底関数に基づく通常の有限要素法と同様にアイソパラメトリック構造が適用可能であり, 数値積分には一般的なガウス求積法を用いることができる.

提案手法において最も重要な B-spline 基底関数の特徴は, 内部要素境界における関数の連続性である. 0 次および 1 次の B-spline 基底関数は, それぞれ区分的定数関数および 1 次 Lagrange 基底関数と同じであるが, 2 次以上の B-spline 基底関数は同次の Lagrange 基底関数と異なっている. 図 5 に, 一様なノットベクトルで



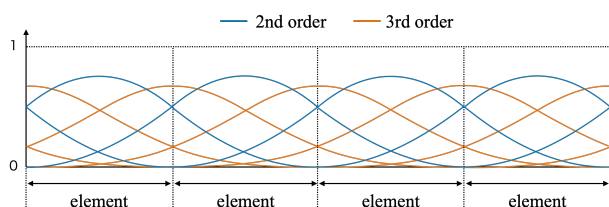


図-5 Quadratic and cubic B-spline basis functions for uniform knot vectors.

定義される 2 次および 3 次の B-spline 基底関数を示す。図に示すように、B-spline 基底関数は Lagrange 基底関数に比べ、要素境界を越えて高い連続性を持つ。一般に、 $p$  次 B-spline 基底関数は、内部ノット  $\xi_i$  で定義される要素境界で  $p - m_i$  次の連続性を持つ。 $m_i$  はノット  $\xi_i$  におけるノットの多重度である。本研究では、全ての内部ノットにおいて多重度を 1 とする。すなわち、すべての内部要素境界において、B-spline 基底関数は  $p - 1$  次の連続性を持つ。前章で述べたように、従来型重合メッシュ法の数値積分における課題は、グローバル基底関数の要素境界における連続性の低さが原因であった。したがって、3 次以上の B-spline 基底関数をグローバル基底関数に適用することで、基底関数とその一階微分値が要素境界で連続かつ滑らかとなり、十分な精度で通常のガウス求積法が適用可能になると考えられる。

また、従来型重合メッシュ法のもう一つの課題であった、各メッシュの基底関数の線形独立性の喪失は、グローバルメッシュとローカルメッシュの両方に Lagrange 基底関数を適用したために生じる問題である。そこで本研究では、各メッシュに異なる基底関数を適用することを提案する。これにより、どのようなメッシュの重なり方であっても、片方のメッシュの基底関数を他のメッシュの基底関数の線形和で表現することは不可能となると思われる。本研究では具体的な事例として、グローバル基底関数に B-spline 基底関数を、ローカル基底関数に Lagrange 基底関数を適用する。

なお、本研究は、構造格子を用いた界面捕捉型の手法において局所高精度化を実現するための基礎的検討の位置づけであり、グローバルメッシュは構造格子であることを前提とする。これにより、B-spline 基底関数を適用する上で、解分布および幾何メッシュが存在する物理空間、基底関数が定義されるパラメータ空間の間の写像は恒等写像となる。また、重合メッシュ法では、ローカルメッシュ上の要素に対応する正規要素で定義した求積点上で積分を評価する場合、グローバルメッシュ上の要素に対応する正規要素におけるこれらの点の座標を特定する必要がある。この座標値は明示的に与えられていないため、メッシュが非構造格子である場合は計算コストの高い繰り返し計算が必要となる。しかし、グローバルメッシュを構造格子とすることで、低コストかつ簡単に座標値を求めることができる。

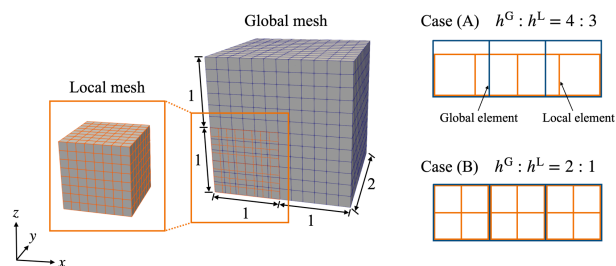


図-6 An example of mesh model for SFEM.

## 4. 検証

### (1) 解析条件

提案手法および従来手法について、相対  $L^2$  誤差ノルム、係数行列の正定値性、反復法を用いた行列計算における反復回数の点から検証を行った。提案手法では、グローバル基底関数として 2, 3 次の B-spline 基底関数を、ローカル基底関数として 1, 2, 3 次の Lagrange 基底関数を用い、計 6 ケースを検証した。従来手法は、グローバル、ローカル基底関数ともに 1, 2, 3 次の Lagrange 基底関数を用い、計 9 ケースを検証した。支配方程式は Poisson 方程式、解析領域は  $[0, 2]^3$ 、局所領域は  $[0, 1]^3$  とし、解析領域の全面に Dirichlet 境界条件を課した。解析モデルの一例を図 6 に示す。両メッシュにおいて要素は全て立方体とした。定量的な比較のため、すべての検証において、提案手法と従来手法に同じメッシュを適用した。

グローバルメッシュとローカルメッシュの要素幅  $h^G$  および  $h^L$  をパラメータとし、図 6 に示すように、case (A)  $h^G : h^L = 4 : 3$ 、case (B)  $h^G : h^L = 2 : 1$  の 2 通りのメッシュにおいて検証を実施した。Case (A) では、ローカルメッシュ上の要素がグローバルメッシュの要素境界を含んでいるため、従来手法では不連続関数の積分が生じる。この解決のために本研究では高次のガウス求積法を採用し、提案手法、従来手法ともに、通常の積分点数よりも 7 点多い積分点数を用いた。提案手法にも適用しているのは、公平な比較のためである。追加積分点数が 7 点の場合、積分点数の変化による相対  $L^2$  誤差ノルムの変化は、全体の誤差の 10% 以下であった。つまり、この積分点数で積分計算が十分に正確であると考えられる。Case (B) では、ローカルメッシュ上の要素がグローバルメッシュの要素境界を含まず、不連続関数の積分は発生しない。したがって、case (B) では標準的なガウス求積法を採用する。

精度検証には創成解を用い、厳密解との相対  $L^2$  誤差ノルムを求める。創成解は、1. 予め厳密解を与え、2. 方程式を成立させるために必要な項を解から計算し、3. 検証用の方程式を構成し、4. 構成した方程式に基づき誤差評価を行う手法である。本研究では、厳密解を式 (10) で定義し、結果として式 (11) で表される検証用の Poisson 方程式を得る。

$$u = \sin 2\pi x \sin 2\pi y \sin 2\pi z + 10 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

$$\Delta u + 12\pi^2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y \sin 2\pi z = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (11)$$

相対  $L^2$  誤差ノルムは式 (12) で定義される.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{L^2} &= \frac{\sqrt{\int_{\Omega^G} |\bar{u}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega^G} |u(\mathbf{x})|^2 d\Omega}} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_G + \varepsilon_L}}{\sqrt{\varepsilon_A}} \\ \varepsilon_G &= \int_{\Omega^G \setminus \Omega^L} |\bar{u}^G(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|^2 d\Omega \\ \varepsilon_L &= \int_{\Omega^L} |\bar{u}^G(\mathbf{x}) + \bar{u}^L(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|^2 d\Omega \\ \varepsilon_A &= \int_{\Omega^G} |u(\mathbf{x})|^2 d\Omega\end{aligned}\quad (12)$$

ここで,  $\Omega^G$  は解析領域全体,  $\Omega^L$  は局所領域を示し,  $u(\mathbf{x})$  は理論解,  $\bar{u}^G(\mathbf{x})$  および  $\bar{u}^L(\mathbf{x})$  はそれぞれグローバルメッシュおよびローカルメッシュにおける計算解である. なお, 本研究では積分計算の単純化のため, 局所領域の外側境界とグローバルメッシュの要素境界が重なるように両メッシュを配置している.

本解析ソルバーの行列計算には汎用的並列線形ソルバーライブラリ Monolithic non-overlapping / overlapping DDM based linear equation solver (monolis)[15] を使用している. 線形ソルバーの解法には共役勾配法を用い, その収束判定値は  $1.0 \times 10^{-10}$  とした. 共役勾配法は, 丸め誤差の影響が無視できる場合, 高々自由度回数反復すれば終了する [16]. したがって, 最大反復回数は自由度回数とし, 自由度回数反復しても収束しない場合は, 係数行列が特異となっていると考える. 丸め誤差の影響を少なくするため, 前処理として対角スケールリング法を適用した.

共役勾配法は行列計算の解法として一般的に使用される手法であり, 正定値対称行列にのみ適用できる. 既存研究では重合メッシュ法における係数行列は正定値行列であると考えられてきた [11] が, 係数行列の正定値性についての厳密な検証や詳細な議論はこれまで実施されていない. そこで本研究では Cholesky 分解の成否に基づき, 係数行列の正定値性を検証する. Cholesky 分解の成否に基づく検証では, Cholesky 分解アルゴリズムを実行し, 負またはゼロのピボットに遭遇せずにアルゴリズムが完了した場合, その行列を正定値とし, それ以外は正定値ではないとする [17].

## (2) 結果と考察

不連続関数の積分による誤差を定性的に観測するために, グローバル基底関数の連続性が異なる 3 ケース (グローバル基底関数が 2, 3 次 B-spline 基底関数および 1 次 Lagrange 基底関数) において, グローバル要素とローカル要素の比が極端な  $h_G : h_L = 40 : 3$  のケースの, 局所領域における相対  $L^2$  誤差分布を計測した. いずれのケースでもローカル基底関数は 1 次 Lagrange 基底関数とし, 通常のガウス求積法を適用した. 結果を図 7 に示す. 相対  $L^2$  誤差分布をカラーコンターで示し, グローバルメッシュを黒線で表している. この結果より, グローバル基底関数の連続性が低いケースほど, グローバル要素境界が内部に存在するローカル要

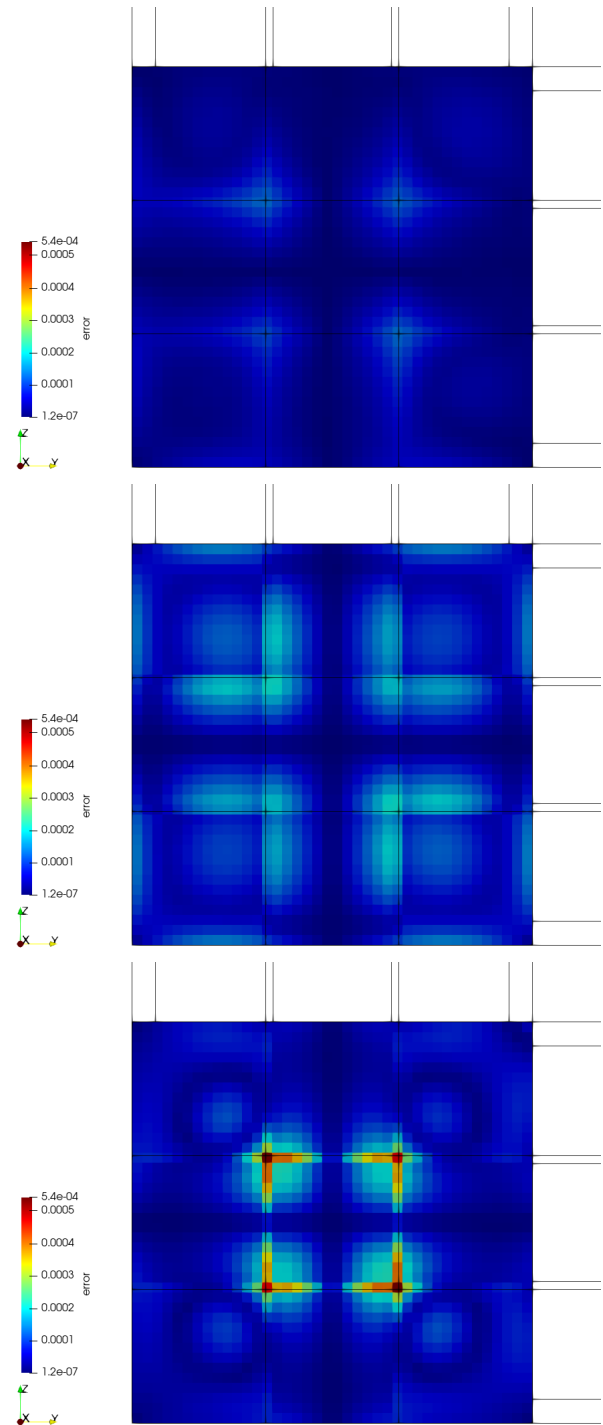


図-7 Relative  $L^2$  error distribution in the local domain in the case of  $h_G : h_L = 40 : 3$ . Global basis functions are (upper) cubic B-spline basis functions, (middle) quadratic B-spline basis functions, and (lower) linear Lagrange basis functions. The contours of the error are shown by color (min:  $1.2 \times 10^{-7}$ , max:  $5.4 \times 10^{-4}$ ).

素において顕著に大きい誤差が生じ, グローバル要素境界を境に誤差分布が不連続になっていることがわかる. また, グローバル基底関数が 3 次 B-spline 基底関数の場合には通常のガウス求積法でも十分な精度で計算可能であると言える.

加えて、提案手法と従来手法において、相対  $L^2$  誤差ノルムの収束や、係数行列の正定値性、行列計算における反復回数の検討をした。その詳細は口頭発表にて紹介する。

## 5. 結論

本研究では、従来の重合メッシュ法の問題点である数値積分と行列の特異性を根本的に解決する B-spline 重合メッシュ法を提案した。

まず、従来の重合メッシュ法の問題点を示し、高精度かつ低コストな数値積分の達成のためにグローバル基底関数に要素境界で高い連続性を持つ基底関数を適用すること、行列の特異性回避のために各メッシュにおける基底関数に異なる種類の基底関数を適用することが有効であることを示した。具体的な解決策として、本論文では、要素境界で  $C^2$  連続性を持つ 3 次 B-spline 基底関数をグローバル基底関数とし、Lagrange 基底関数をローカル基底関数とする手法を提案した。提案手法と従来手法を 3 次元 Poisson 方程式に適用して、精度と行列計算の反復回数の点から検証を行った。検証結果から、提案手法は、従来手法よりも誤差の収束性に優れており、また通常のガウス求積法を用いて十分な精度で計算できることが示された。また、提案手法は、行列計算の収束性の点でも従来手法より優れていることが示された。すなわち、提案手法は精度を維持したまま計算コストを削減できる可能性を持つ。

**謝辞:** 本研究は、JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S および JSPS 科研費 22H03601 の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

## 参考文献

- [1] J. Fish, The s-version of the finite element method, *Comput. Struct.* 43 (3) (1992) 539–547.
- [2] Y. Jiao, J. Fish, On the equivalence between the s-method, the XFEM and the ply-by-ply discretization for delamination analyses of laminated composites, *International Journal of Fracture* 191 (1) (2015) 107–129.
- [3] O. Vorobiov, S. A. Tabatabaei, S. V. Lomov, Mesh superposition applied to meso-FE modelling of fibre-reinforced composites: Cross-comparison of implementations, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 111 (11) (2017) 1003–1024.
- [4] T. He, N. Mitsume, F. Yasui, N. Morita, T. Fukui, K. Shibamura, Strategy for accurately and efficiently modelling an internal traction-free boundary based on the s-version finite element method: Problem clarification and solutions verification, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 404 (2023) 115843.
- [5] P. Cheng, X. Zhuang, H. Zhu, J. Fish, Application of s-version finite element method to phase field modeling for localized fractures, *Comput. Geotech.* 156 (2023) 105204.
- [6] J. Fish, S. Markolefas, Adaptive s-method for linear elastostatics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* (1993).
- [7] S.-H. Lee, J.-H. Song, Y.-C. Yoon, G. Zi, T. Belytschko, Combined extended and superimposed finite element method for cracks, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 59 (8) (2004) 1119–1136.
- [8] T. Ooya, S. Tanaka, H. Okada, On the linear dependencies of interpolation functions in s-version finite element method, *J. Comput. Sci. Technol.* 3 (1) (2009) 124–135.
- [9] J. Fish, S. Markolefas, R. Guttal, On adaptive multi-level superposition of finite element meshes for linear elastostatics, *Appl. Numer. Math.* (1994).
- [10] H. Okada, S. Endoh, M. Kikuchi, On fracture analysis using an element overlay technique, *Eng. Fract. Mech.* 72 (5) (2005) 773–789.
- [11] H. Okada, C. T. Liu, T. Ninomiya, Y. Fukui, N. Kumazawa, Applications of element overlay technique to the problems of particulate composite materials (2004).
- [12] R. Fan, The rs - method for material failure simulations, *International journal for numerical methods in* (2008).
- [13] S. L. Angioni, A. Visrolia, M. Meo, Combining XFEM and a multilevel mesh superposition method for the analysis of thick composite structures, *Composites Part B* 43 (2) (2012) 559–568.
- [14] Y. Otoguro, K. Takizawa, T. E. Tezduyar, Space-time VMS computational flow analysis with isogeometric discretization and a general-purpose NURBS mesh generation method, *Comput. Fluids* 158 (2017) 189–200.
- [15] N. Morita, Monolithic non-overlapping/overlapping DDM based linear equation solver, <https://www.kz.tsukuba.ac.jp/%7enmorita/monolis.html>, [accessed 20 March 2023] (2022).
- [16] M. R. Hestenes, E. Stiefel, Others, Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 49 (6) (1952) 409–436.
- [17] N. J. Higham, Cholesky factorization, *Wiley Interdiscip. Rev. Comput. Stat.* 1 (2) (2009) 251–254.