

源点選択を含む基本解近似解法の開発とその面外波動問題への適用

Development of the method of fundamental solutions with source point selection and its application to anti-plane wave problems

古川陽¹⁾ 坂井友哉²⁾

Akira Furukawa and Tomoya Sakai

¹⁾博(工) 北海道大学 工学研究院 准教授 (〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目, E-mail: afurukawa@eng.hokudai.ac.jp)

²⁾北海道大学 環境科学院 修士課程 (〒060-0810 北海道札幌市北区北10条西5丁目, E-mail: sakai.tomoya.a8@elms.hokudai.ac.jp)

The method of fundamental solutions (MFS) is a numerical method for solving partial differential equations. In the MFS, source points representing the approximation solutions are located in the complementary domain of analysis ones. Generally, the number and location of the source points are arbitrary, but they affect the accuracy of approximation solutions. Therefore, an appropriate method for determining them is required. In this study, we implement the orthogonal matching pursuit to the MFS for the selection of source points and check its validity.

Key Words : The method of fundamental solutions, Orthogonal matching pursuit, Antiplane wave

1. はじめに

基本解近似解法 [1] は、偏微分方程式に対するメッシュフリー型の数値解法であり、解析における未知数の数が少なく済む、数値計算の実装が容易である、などの特徴を持つ。その一方で、基本解近似解法では、解表現に用いる基本解の源点の数や配置が近似解に影響を及ぼすことが知られている。線形問題に対して疎な解を求める手法のひとつに、直交マッチング追跡 [2] がある。この手法は¹⁾最適化に分類され、貪欲法に基づいて基底ベクトルの選択を繰り返し行う。直交マッチング追跡により、線形問題の解を表現するために必要となる基底を選択することが可能となる。そのため、直交マッチング追跡は基本解近似解法の源点の数や配置の決定にも適用可能と考えられるが、その有効性は十分に検討されていない。

以上を踏まえ、本研究では、直交マッチング追跡による源点選択を含む基本解近似解法を開発する。開発手法を用いて線形弾性体の面外波動散乱問題を解き、近似解の特徴と源点配置の選択傾向について考察する。これ以降の説明では、特に断りのない限り、1つの項に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する。また、ギリシャ文字による下付き添え字は1, 2をとるものとする。

2. 解析手法

(1) 対象とする問題

本研究では、等方で均質な線形弾性体の面外波動散乱問題に対する基本解近似解法の適用について考える。図-1に、解析対象とする外部領域 V を示す。同図において、 ∂V は散乱体の境界、 V_C は補領域を表す。また、 $\mathbf{n} (= [n_1, n_2]^T)$ は境界上の単位外向き法線ベクトルであ

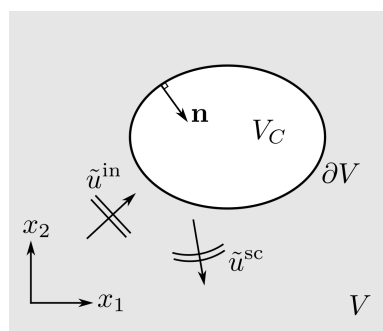


図-1 面外波動散乱問題

る。ただし、 $(\cdot)^T$ は行列・ベクトルの転置を表す。

周波数領域における等方性弾性体の運動方程式は、物体力をゼロと仮定すると、次式で与えられる。

$$\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \rho \omega^2 \right) \tilde{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x} (= [x_1, x_2]^T)$ における面外方向変位、 ω は角周波数を表す。また、 ρ, μ は弾性体の密度とせん断弾性係数を表す。加えて、面外方向変位 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は、重ね合わせの原理により、以下の関係式を満たす。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V \cup \partial V \quad (2)$$

ここに、 $(\cdot)^{\text{in}}$ および $(\cdot)^{\text{sc}}$ は、入射波および散乱波に関する物理量を表す。ただし、入射波は既知とし、散乱波は放射条件を満たす。面外波動散乱問題は、これらの式に適切な境界条件を与えることで解くことができる。本研究では表面力フリー問題を考え、境界条件を以下

の式で与える.

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial n_x} = \mu n_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial x_\beta} = 0; \mathbf{x} \in \partial V \quad (3)$$

ここに, $\tilde{t}(\mathbf{x})$ は位置 \mathbf{x} における面外方向表面力であり, $\partial/\partial n_x$ は境界 ∂V 上での法線方向微分を表す.

(2) 基本解近似解法

前節に示した問題に対して基本解近似解法を適用する. 基本解近似解法では, 領域内部および境界上の変位を次式で表現する.

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) := \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k; \mathbf{x} \in V \cup \partial V, \mathbf{y}_k \in V_C \quad (4)$$

ここに, \tilde{c}_k は境界条件によって決定される近似係数を表す. また, $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は式 (1) に示す運動方程式に対する基本解であり, 次式で与えられる.

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r) \quad (5)$$

ここに, \mathbf{x} は観測点, \mathbf{y} は源点を表す. また, k_T は面外波動の波数, $H_n^{(1)}$ は n 次の第 1 種 Hankel 関数を表す. 加えて, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ および $i = \sqrt{-1}$ である. 式 (4) を用いれば, 表面力は以下の式で表現できる.

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) := \tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \tilde{c}_k; \mathbf{x} \in \partial V, \mathbf{y}_k \in V_C \quad (6)$$

ただし, $\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ および $\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ は, それぞれ以下の式で与えられる.

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu n_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_\beta} \quad (7)$$

$$\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \mu n_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})}{\partial x_\beta} \quad (8)$$

本研究では, 散乱体の境界 ∂V 上に選点 \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, M$) を配置し, その選点上で境界条件を満足するように近似係数 \tilde{c}_k を決定する. このとき, 解くべき連立 1 次方程式は, 以下のように表現できる.

$$\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{h}} \quad (9)$$

ただし, $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{C}^N$, $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^M$ である. 式 (9) において, 未知ベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ の成分は, 次式で表現される.

$$(\tilde{\mathbf{c}})_k := \tilde{c}_k \quad (10)$$

また, 係数行列 $\tilde{\mathbf{D}}$ および既知ベクトル $\tilde{\mathbf{h}}$ の成分は, それぞれ以下の式で与えられる.

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{ik} := \tilde{T}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) \quad (11)$$

$$(\tilde{\mathbf{h}})_k := -\tilde{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}_i) \quad (12)$$

(3) 直交マッチング追跡による求解

本研究では, 式 (9) に示す連立 1 次方程式の求解に直交マッチング追跡を用いる. 直交マッチング追跡では, 線形システム $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ に対して, 以下に示す l^0 最適化問題を解く.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (13)$$

ここに, $\|\cdot\|_0$ は l^0 疑似ノルムであり, その値は対象とするベクトルの非ゼロ成分の個数に対応する. 直交マッチング追跡では, 式 (13) を解くために反復計算を実行する. このとき, 初期値は以下のように設定する.

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}, \mathbf{r}[0] = \mathbf{y}, \mathcal{S}_{-1} = \emptyset, k = 0 \quad (14)$$

ここに, $\mathbf{0}$ は零ベクトル, \mathcal{S}_k は各反復ステップで選択した列ベクトルの情報を記憶するためのインデックス集合である. 最適解の計算では, 式 (14) をもとに, 以下に示す処理を順に実行する.

$$i[k] := \arg \max_i \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r}[k] \rangle|^2}{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle} \quad (15)$$

$$\mathcal{S}_k := \mathcal{S}_{k-1} \cup \{i[k]\} \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{x}}[k] := [\mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}^H \mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}]^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}^H \mathbf{y} \quad (17)$$

$$\mathbf{x}[k+1] := \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{e}_i \quad (18)$$

$$\mathbf{r}[k+1] := \mathbf{y} - \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{a}_i \quad (19)$$

$$k := k + 1 \quad (20)$$

ここに, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトルの内積, \mathbf{a}_i は行列 \mathbf{A} の i 列目の列ベクトルを表す. また, $\mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}$ は, 行列 \mathbf{A} のうち, インデックス集合 \mathcal{S}_k に記憶されたインデックスの列ベクトルのみを並べてできる行列を表す. 加えて, \mathbf{e}_i は i 番目の成分にのみ値を持つ標準基底を表す. 式 (19) に示す $\mathbf{r}[k+1]$ は, $k+1$ 回目の反復計算における残差ベクトルに対応する. なお, 式 (15)–(20) に示す反復計算は, 以下の終了条件が満足されるまで繰り返し実行する.

$$k = M \quad (21)$$

ただし, この終了条件の判定は, 式 (20) の計算の後に実行される. これにより, 近似係数は, 形式上, 以下のように表現できる.

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{x}[M] \quad (22)$$

式 (22) で与えられるベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ の非ゼロ成分の個数は M であり, これは選点の数に一致する. 加えて, $N > M$ として計算を実行すれば, 源点の選択が可能となる.

3. 数値解析例

(1) 解析条件

本稿では, 波動関数展開 [3] による解析解が存在する問題を対象に, 数値解析結果を示す. 対象とする問題において, 散乱体は原点を中心とする半径 $a = 1$ の円とし, 入射波は以下に示す平面波で与えた.

$$\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \exp[ik^{\text{in}} x_1] \quad (23)$$

表-1 参照解との最大誤差 D_{\max} の比較

	M			
		100	200	400
N	109	0.850E-04	-	-
	249	0.412E-03	0.122E-05	-
	484	0.206E-01	0.583E-05	0.164E-05
	1941	0.421E-01	0.394E-02	0.181E-05
	7825	0.128E-01	0.139E-01	0.151E-01
	31397	0.553E+01	0.122E-01	0.170E-01
	125609	0.650E+01	0.697E-02	0.118E-01

表-2 条件数 $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$ の比較

	M			
		100	200	400
N	109	0.181E+19	-	-
	249	0.305E+06	0.261E+19	-
	484	0.209E+04	0.225E+12	0.738E+12
	1941	0.800E+02	0.164E+05	0.362E+11
	7825	0.109E+03	0.326E+03	0.127E+06
	31397	0.178E+04	0.290E+03	0.947E+03
	125609	0.183E+04	0.124E+04	0.161E+04

ここに、 k^{in} は入射波の波数であり、次式で与えられる。

$$k^{\text{in}} = k_T = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (24)$$

また、角周波数は $\omega = 1$ とし、弾性体の密度は $\rho = 1$ 、せん断弾性係数は $\mu = 1$ とした。選点 \mathbf{x}_i は境界上に等間隔に配置し、その数は $M = 100, 200, 400$ とした。源点 \mathbf{y}_k は解析における補領域に、 x_1, x_2 軸方向に対して等間隔に配置した。このとき、源点の数は $N = 109, 249, 484, 1941, 7825, 31397, 125609$ とした。ただし、解析は $N > M$ の組合せの場合のみ実行した。なお、波動関数展開における展開項数は 20 とした。

本稿では、基本解近似解法によって得られる近似解 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ と波動関数展開による参照解 $\tilde{u}^{\text{ref}}(\mathbf{x})$ の最大誤差を用いて解析結果を整理する。参照解の最大誤差 D_{\max} の計算には、以下の式を用いた。

$$D_{\max} = \max_{l=1,2,\dots,L} |\tilde{u}(\xi_l) - \tilde{u}^{\text{ref}}(\xi_l)| \quad (25)$$

ここに、 ξ_l は境界上に等間隔に配置された標本点を表し、 $L = 1000$ とした。

(2) 解析結果

表-1 に、各解析条件における参照解との最大誤差 D_{\max} を示す。この表に示す結果から、すべての M に対する結果において、 N が小さい場合に最大誤差 D_{\max} が小さくなる傾向が確認された。また、 N の変化に対する最大誤差 D_{\max} の変化は単調ではなく、増減を伴うことが確認された。表-2 に、各解析条件における条件数 $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$ の計算結果を示す。この表に示す結果から、すべての M に対して、 N を小さくすると条件数が極めて大きくなり、 N を大きくすると条件数の増大が緩和されることが確認された。これらの結果から、直交マッチング追跡を用いた基本解近似解法では、 N を小さくする（源点を疎に分布させる）ことで、参照解との最大誤差が小さくなり、条件数 $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$ は大きくなった。一方、 N を大きくする（源点を密に分布させる）と、その逆の傾向を示すことが確認された。

続けて、選択された源点の傾向について確認する。図-2 から図-6 に、 $M = 400$ における各解析条件 ($N = 484, 1941, 7825, 31397, 125609$) における源点の配置と

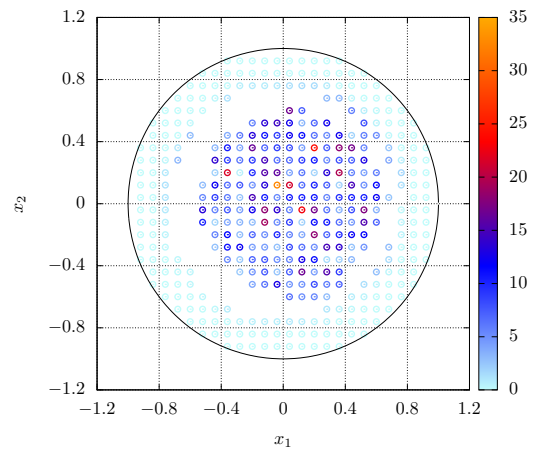


図-2 選択された源点 \mathbf{y}_k の配置と近似係数の絶対値 $|c_k|$ ($M = 400, N = 484$)

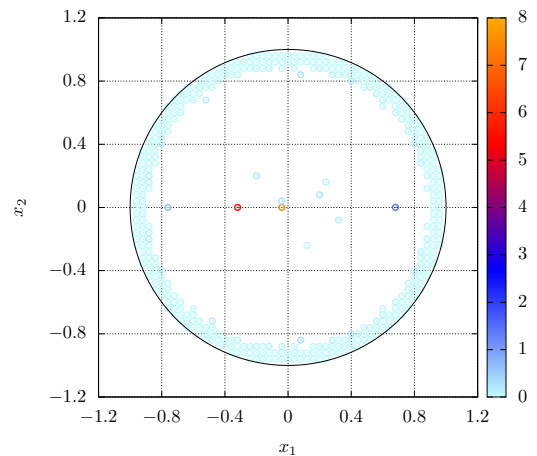


図-3 選択された源点 \mathbf{y}_k の配置と近似係数の絶対値 $|c_k|$ ($M = 400, N = 1941$)

近似係数の絶対値 $|c_k|$ を示す。これらの図に示す結果から、図-2 および図-3 に示す結果では、源点の配置は x_2 軸に対して非対称となり、近似係数の絶対値 $|c_k|$ は比較的大きくなった。一方、図-4 から図-6 に示す結果では、 N の増加に伴い、選択される源点の配置と近似係数の絶対値が収束する様子が確認された。また、源点の配置は、 x_2 軸に対して概ね対称となった。以上の

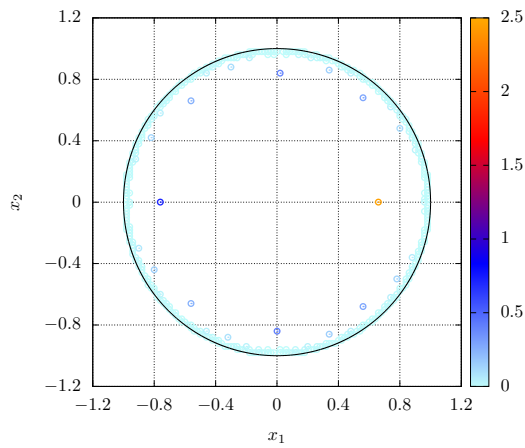


図-4 選択された源点 y_k の配置と近似係数の絶対値 $|c_k|$ ($M = 400, N = 7825$)

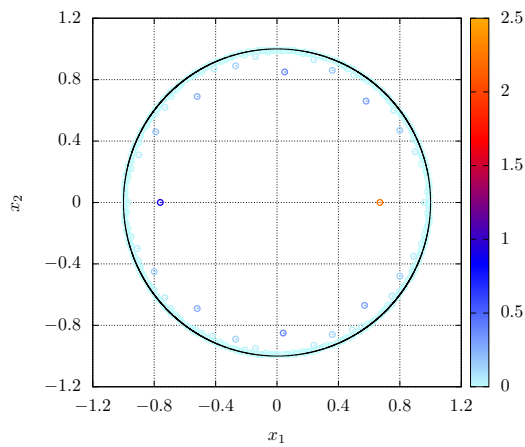


図-5 選択された源点 y_k の配置と近似係数の絶対値 $|c_k|$ ($M = 400, N = 31397$)

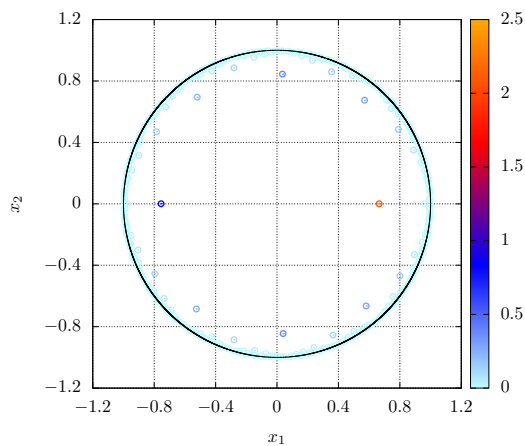


図-6 選択された源点 y_k の配置と近似係数の絶対値 $|c_k|$ ($M = 400, N = 125609$)

ことから、源点の数 N の増加によって、近似解の解表現が収束することが確認された。

最後に、 N の増加によって参照解との最大誤差 D_{\max} の減少を実現できなかった原因について考える。図-7 に、 $\{M, N\} = \{400, 125609\}$ に対する境界上の表面力 $\tilde{t}(\mathbf{x})$

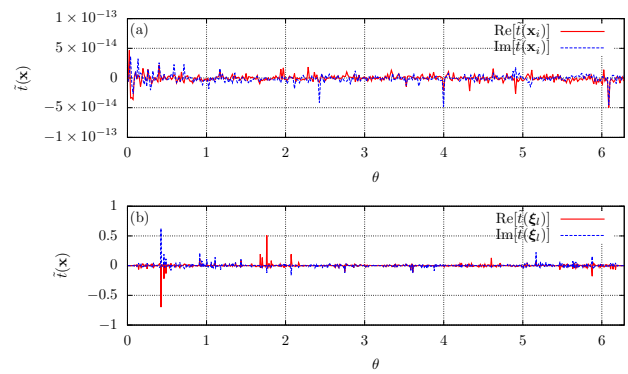


図-7 境界上の表面力 ((a) 選点 \mathbf{x}_i における値, (b) 標本点 ξ_l における値)

を示す。同図において、(a) は選点 \mathbf{x}_i における境界値を、(b) は最大誤差の計算に用いた標本点 ξ_l における境界値を示す。これらの結果から、同図 (a) に示す通り、選点では境界条件を満たす境界値が得られていることが確認できる。一方、同図 (b) に示す通り、標本点 ξ_l では境界値が大きく異なる位置が存在し、表面力フリーの境界条件を適切に表現できていないことが確認できる。これが原因となり、参照解との最大誤差 D_{\max} の減少を実現できなかったと考えられる。

4. おわりに

本研究では、等方で均質な線形弾性体の面外波動散乱問題を対象に、源点選択を含む基本解近似解法を開発した。開発手法では、源点選択に直交マッチング追跡に基づく l^0 最適化を用いた。開発手法を用いた数値解析例では、まず参照解との最大誤差 D_{\max} と条件数 $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$ を用いて結果を整理した。得られた結果から、源点の数 N が小さい場合に、参照解との最大誤差 D_{\max} が小さくなり、条件数 $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$ は大きくなることが確認された。続けて、選択された源点の配置と近似係数の絶対値の比較を行った。この結果から、源点の数 N を増やすことで、選択される源点の配置と近似係数の絶対値が概ね等しくなることが確認された。

開発手法では、源点の数 N を増やした場合の近似解の精度に課題が残った。今後は、源点の数 N が大きい場合の近似解の精度の向上に取り組む予定である。また、源点選択については、 l^1 正則化など他の手法の適用可能性について検討を行う予定である。

参考文献

- [1] Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.27, pp.759–769, 2003.
- [2] 永原正章：スパースモデリング-基礎から動的システムへの応用-, コロナ社, 2004.
- [3] Pao, Y.H., Mow, C.C.: *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane, Russak, New York, USA, 1973.