

# 2次元半無限空間における Green 関数を用いない 間接型境界要素法による波動散乱解析

Scattering analysis in 2D half space  
by an indirect BEM without Green's function

利光陸<sup>1)</sup>, 飯盛浩司<sup>2)</sup>  
Riku Toshimitsu and Hiroshi Isakari

<sup>1)</sup>学(工)慶應義塾大学理工学部(〒223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉3-14-1, E-mail: riku29@keio.jp)

<sup>2)</sup>博(工)慶應義塾大学理工学部(〒223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉3-14-1, E-mail: isakari@sd.keio.ac.jp)

The recently proposed hybrid boundary element method [Lai et al, ACHA, 2018], in which both the Sommerfeld integral layer potential and the fundamental solution are employed, is a promising numerical method for analysing wave scattering defined in a semi-infinite space. The original method, however, suffers from the so-called fictitious eigenvalue problem (FEP). This study aims to modify the formulation so as to establish a boundary integral equation free from FEP. We also extend the hybrid approach to address cavity scattering by introducing virtual boundaries to manipulate the cavity geometry.

**Key Words :** Acoustic scattering problem, fictitious eigenvalue, cavity scattering, half space, BEM

## 1. はじめに

音の伝播は日常、産業のあらゆる場面における興味の対象である。例えば、飛行機や電車、車、生活家電といった日々利用する製品から、工場で使われるような大型機械まで、全ての製品において騒音を小さくすることが求められる。そのため、音の伝播の数理モデルである「音響散乱問題」を解くための数値解法が古くから研究されており、特に境界要素法は、無限に広がる空間における散乱問題に対して空間を打ち切ることなく解析可能な優れた解法である。しかし、境界が無限の長さを持つ場合（例えば半無限散乱問題）には、Green 関数を利用し、個々の問題に応じた定式化を行う必要がある。一方で、このような問題の汎用解法として、Sommerfeld らが Sommerfeld 積分表現と経路積分を組み合わせた解法が機械的で幅広く効果的であることを示した [1,2]。この解法は基本解の Fourier 変換を用いるため、解が高周波成分を含む場合、例えば散乱体と半無限境界が非常に近いような場合には、非常に幅広い区間における積分が必要となる。この問題点を解決するために数多くの解法が提案されてきたが、汎用的に用いることのできる「決定版」はまだ定まっていない。しかし、近年 Sommerfeld らによる方法の問題点を解決する有望な方法として Lai らが Hybrid 積分法 [3] を提案した。これは物理空間における層ポテンシャルと Fourier 空間の Sommerfeld 積分表現を組み合わせた Hybrid 積分表現を用いた解法である。この解法では点波源、散乱体のいずれかが半無限境界に近い場合にもある程度の積分範囲で精度良く解くことができる。

しかしながら、Lai らの方法は見かけの固有値問題を考慮しておらず、その精度には疑問が残る。そこで、本研究では Lai らの定式化を修正し、実数の範囲に見かけの固有値を持たない Hybrid 積分表現を提案する。

さらに、Lai らの方法に新たなアイデアを加え、半無限空間における散乱問題の中でも更に難しい cavity scattering を解くことも本研究の主眼である。cavity scattering とは凹形状が含まれるような壁を持つ半無限空間における散乱問題である。そのため、本研究では Hybrid 法を拡張し、cavity scattering を高精度に解くための方法論を確立することをもうひとつの目的とする。

## 2. 提案法

### (1) 見かけの固有値問題の解消

本節では Lai ら [1] により提案された Hybrid 積分表現を用いた解法における、見かけの固有値問題を Burton-Miller 法を用いて解消する方法を示す。

見かけの固有値問題とは、間接型境界要素法を用いて散乱体を含む散乱問題を解く場合に、散乱体内部での共振による影響が散乱体外部に現れ、精度が悪化する問題である。この問題の解消方法として Burton-Miller 法があり、この方法を応用して Hybrid 積分表現を用いた解法における見かけの固有値問題を解消する。このとき、従来の Burton-Miller 法は解に含まれるすべての項に Burton-Miller 型の項を追加するのに対し、提案法では散乱体による散乱波の項のみに Burton-Miller 型の項を追加して解を仮定する。

### (2) Cavity scattering の解法

本節では Hybrid 積分表現を用いた cavity scattering の解法を示す。この解法は従来法である鏡像法で解けなかった設定での散乱解析を行うことを可能にする。

図 1 に示す設定の問題を解く。図 1 は無限の長さを持つ半無限境界の一部が凹んでおり、更に点波源と 2 つの散乱体が配置されている。半無限境界が凹んでいるため鏡像法を用いて解くことができない。同様の理由

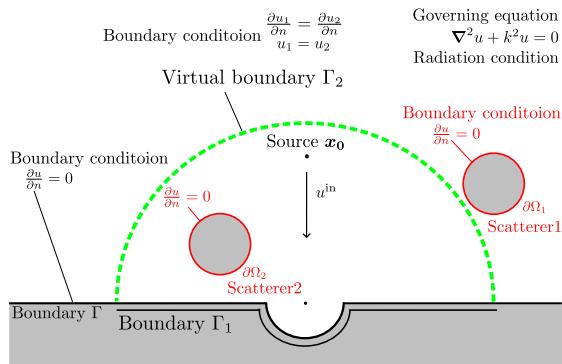


図-1 cavity scattering の問題設定

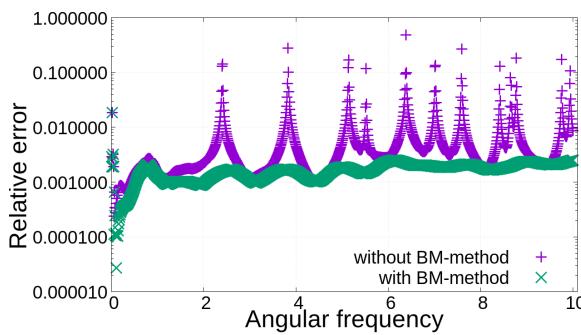


図-2 従来法（鏡像法）と提案法の相対誤差

により Hybrid 積分表現を用いた解法もそのまま用いることはできない。そこで、図 1 に示した仮想境界を導入し、仮想境界の外側では半無限境界が凹みをもたない半無限空間散乱問題、仮想境界の内側では有限空間の散乱問題として解く。仮想境界の導入にあたり、仮想境界の外側と内側の影響を相互に伝達するため、仮想境界からの影響を表す項を積分方程式に追加する。

### 3. 数値計算例

種々のベンチマーク問題に対し、提案法による結果と鏡像法による結果との比較による精度検討を行い、十分な精度の結果が得られていることを確認した。

図 2 は提案法と鏡像法により求めた内点における音圧の複素振幅の実部の相対誤差をまとめた図である。内点は \$(0.0, 4.0)\$ に重心を持つ一辺 8.0 の正方形領域に約 10000 点配置した。対象とした問題は、領域 \$\mathbb{R}\_+^2\$ において、\$(0.0, 1.5)\$ を中心とする半径 1.0 の円に \$(1.0, 3.0)\$ に配置された点源から波が入射する問題である。境界条件は半無限境界、散乱体表面とともに齊次 Neumann 境界条件とした。この図から、見かけの固有値による精度悪化が解消されていることが分かる。

図 3 は、提案法を用いて計算した散乱体を含む cavity scattering のある時刻における波の様子を表す図である。対象とした問題は、中心 \$(0.0, 0.0)\$、半径 1.0 の円により下側に凹まれた \$y=0\$ の半無限境界と、中心が \$(-1.5, 1.5)\$ で半径 0.3 の円、中心が \$(3.5, 3.5)\$ で半径 0.3 の円が配置されており、そこへ \$(0.0, 2.0)\$ にある点源からの波が入射する問題である。境界条件は半無限境界、散乱体表

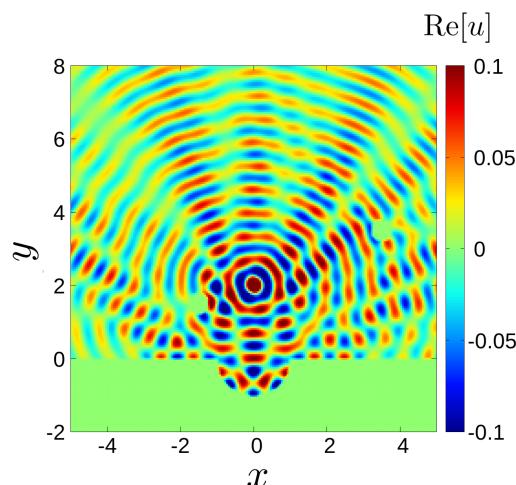


図-3 提案法で求めた波の様子

面ともに齊次 Neumann 境界条件とした。また、仮想境界は \$(0.0, 0.0)\$ を中心とする半径 3.0 の円の上半分とした。仮想境界上において明らかに不連続である箇所は無く、提案法は凹形状を含む複雑な設定の散乱解析が可能であることが分かる。提案法による計算の妥当性検討には境界近くでの数値微分を用いて境界条件が実用上問題ない精度で計算できていることを確認した。

### 4. 結論

Burton-Miller 法を応用することにより Hybrid 積分表現を用いた解法の見かけの固有値問題を解消することができた。また、提案法に仮想境界を導入するというアイデアを加え、従来法である鏡像法では解くことができない cavity scattering の解法を提案した。

今後の課題としては、本手法の電磁波や弾性波への拡張や 3 次元の問題への拡張が挙げられる。また、上記の課題に取り組む際に計算量が大幅に増大し、計算の短縮も必要となると考えられるため、解法全体の高速化も今後の課題とする。

謝辞: Zhejiang 大学の Jun Lai 先生は、先行研究論文の内容に関するメールでの質問に快く答えてくださいました。お礼申し上げます。

### 参考文献

- [1] Arnold Sommerfeld. Über die ausbreitung der wellen in der drahtlosen telegraphie. *Annalen der Physik*, Vol. 333, pp. 665–736, 1909.
- [2] Balth Van Der Pol. Theory of the reflection of the light from a point source by a finitely conducting flat mirror, with an application to radiotelegraphy. *Physica*, Vol. 2, No. 1, pp. 843–853, 1935.
- [3] Jun Lai, Leslie Greengard, and Michael O’Neil. A new hybrid integral representation for frequency domain scattering in layered media. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 45, No. 2, pp. 359–378, 2018.