

温度上昇を抑制する構造設計のための 非定常熱・流体トポロジー最適化

Basic study on unsteady-state thermal-fluid topology optimization to design temperature rise suppression structures

高荒圭佑¹⁾ 干場大也²⁾ 高瀬慎介³⁾ 西口浩司⁴⁾ 加藤準治⁵⁾
Keisuke Takaara, Hiroya Hoshiba, Shinsuke Takase, Koji Nishiguchi and Junji Kato

¹⁾名古屋大学 大学院工学研究科 (〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: takaara.keisuke.c9@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

²⁾博 (工) 名古屋大学 大学院工学研究科 助教 (E-mail: hiroyahoshiba@civil.nagoya-u.ac.jp)

³⁾博 (工) 八戸工業大学 大学院工学研究科 准教授 (E-mail: takase@hi-tech.ac.jp)

⁴⁾博 (工) 名古屋大学 大学院工学研究科 准教授 (E-mail: kojinishiguchi@civil.nagoya-u.ac.jp)

⁵⁾Dr.-Ing. 名古屋大学 大学院工学研究科 教授 (E-mail: junjikato@civil.nagoya-u.ac.jp)

This paper deals with density-based topology optimization for unsteady-state thermal-fluid interaction problems. Governing equations are incompressible Navier-Stokes and energy equation, discretized with stabilized finite element method and Crank-Nicolson method. Sensitivity analysis is conducted based on the discrete adjoint method which yields exact sensitivities for discrete optimization problem. Numerical examples address the minimum thermal compliance problems for both natural and forced convection. The features of the topologies obtained for different heating times and their performances are investigated.

Key Words : *Topology optimization, Unsteady-state thermal-fluid problems, Finite element method*

1. 序論

近年、電子機器の高集積化に伴い発熱密度が大幅に上昇したことから、その熱対策が不可欠となっている。このような背景から、製品開発の初期段階から合理的な熱の移動と流体の流れを同時に考慮したものづくり、中でもトポロジー最適化を駆使した新しい設計・製造プロセスが注目されている。

熱・流体問題を対象としたトポロジー最適化の最初期の研究は、Dede[1]やYoon[2]による研究である。Dedeは、流体のエネルギー損失および解析対象領域の平均温度の重み付き和を目的関数とし、これを最小化する流路構造を得た。Yoonは、熱・流体場における熱コンプライアンス最小化問題を実施するとともに、熱・流体問題を考慮することで生じる局所最適解の問題も指摘している。その後、自然対流問題[3]~[5]、RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) に基づく乱流問題[6]など、数多くの設計問題に展開されている。ただし、上記の熱流体問題のトポロジー最適化手法は、定常流れを対象としており、非定常流れを考慮した設計には適用できない。実現象としては、速度場や温度場は時間的に変化するため、その非定常性を考慮した設計が必要となる場合は多い。また、扱う問題によっては、流れ場を安定的に解析することができない場合もある。

この課題を解決するため、非定常熱・流体問題を考慮したトポロジー最適化手法がいくつかの研究で提案されている。Coffin and Maute[7]はレベルセット法とXFEM (Extended Finite Element Method) を用いて固体-流体間の界面条件を取り扱いつつ、定常および非定常状態の自然対流場におけるトポロジー最適化を実施している。

Yaji et al.[8]は大規模三次元非定常熱・流体問題に対するトポロジー最適化を実施するとともに、並列化効率の評価を行なっている。Zeng et al.[9]はpseudo-3Dモデルを提案するとともに、1秒程度の瞬間的な冷却性能に着目したヒートシンクの設計問題を紹介している。Xie et al. [10]は、熱・流体解析に格子ボルツマン法を用いつつ、レベルセット法に基づきトポロジー最適化を実施している。

以上のように、近年では非定常熱・流体問題を前提としたトポロジー最適化手法が提案されているものの、各手法はレベルセット法などの特定の材料表現法を前提としており、それ以外の手法に対する適用性・拡張性については明らかでない。そこで本研究では、自然対流問題に対する密度法の適用性と随伴法による解析的感度の精度の検証を主題として、非定常熱・流体問題のトポロジー最適化を前提とした数値検証を行う。はじめに、定常問題を扱った先行研究[3]を拡張する形で、非定常問題に対するトポロジー最適化手法を構築する。支配方程式はNavier-Stokes方程式およびエネルギー方程式であり、これらは安定化有限要素法とCrank-Nicolson法により離散化する。続いて、Michaleris et al.[11]による一般的な感度解析手法をもとに非定常熱・流体問題における感度および随伴問題を具体的に定式化する。さらに、算出される感度の精度を参照解と比較検証する。また、密度法に基づき逆透過率に加えて熱伝導率、単位体積あたりの熱容量を密度に関する補間関数で表現する。その上で本手法を非定常の強制対流場および自然対流場における熱コンプライアンス最小化問題に適用し、得られるトポロジーの特徴やその性能を調べる。

2. 支配方程式

(1) 非定常熱・流体問題の支配方程式

非定常熱・流体問題の支配方程式として、以下に示す非圧縮性 Newton 流体を仮定した Navier-Stokes 方程式および連続式、エネルギー方程式を用いる。

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - f_i^B - f_i^{\text{ext}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} - Q = 0 \quad (3)$$

x_i は空間座標, t は時間, u_i は流速, p は圧力, ρ は質量密度, μ は粘性係数, f_i^B は後述する Brinkman-penalization 項, f_i^{ext} は外力, T は温度, c は比熱, k は熱伝導率, Q は加熱率を表す。添字 i および j は空間自由度に対応するインデックスである。なお、本研究では、質量密度, 熱伝導率, 比熱, 粘性係数の温度依存性は考慮せず一定とする。

Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件は以下のように表される。

$$u_i = \bar{u}_{Di} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4)$$

$$\left(-p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j = \bar{h}_{Ni} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (5)$$

$$T = \bar{T}_{Di} \quad \text{on } \Gamma_T \quad (6)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j = \bar{q}_N \quad \text{on } \Gamma_q \quad (7)$$

ここで, Γ_u と Γ_T はそれぞれ, 流速と温度に関する Dirichlet 境界, また Γ_h と Γ_q はそれぞれ, トラクションと熱流束に関する Neumann 境界である。 \bar{u}_{Di} , \bar{T}_{Di} はそれぞれの Dirichlet 境界上で規定される流速と温度である。 \bar{h}_{Ni} , \bar{q}_N はそれぞれの Neumann 境界上で規定されるトラクションと熱流束である。なお, δ_{ij} は Kronecker のデルタ, n_i は外向き単位法線である。

また, 初期条件が次式のように与えられる。

$$u_i = \bar{u}_{0i} \quad \text{at } t = 0 \quad (8)$$

$$T = \bar{T}_0 \quad \text{at } t = 0 \quad (9)$$

(2) Brinkman-penalization による固体領域の表現

流体と固体の分布問題をトポロジー最適化の枠組みで取り扱うために, 流体と固体を含む領域全体で統一的な支配方程式を記述する必要がある。これを実現するため, Borvall and Peterson[12] の手法に基づき, 次式で定義される Brinkman-penalization 項を導入する。

$$f_i^B = -\alpha u_i \quad (10)$$

ここで, α は逆透過率を表す。 α は数値不安定が生じない範囲で大きな値とする。

3. 離散化方程式

(1) 安定化有限要素法に基づく離散化

式 (1), (2) に対して, SUPG/PSPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin / Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法を適用し, 式 (3) に対して SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法を適用すると, 以下の時間に関する常微分方程式を得る。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_S) \dot{\mathbf{u}}_i + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_S + \mathbf{B} + \mathbf{B}_S) \mathbf{u}_i - (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{Si}) \mathbf{p} + \mathbf{D}_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{\Sigma}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Si} \quad (11)$$

$$\mathbf{C}_j \mathbf{u}_j + \mathbf{M}_{Pj} \dot{\mathbf{u}}_j + (\mathbf{A}_{Pj} + \mathbf{B}_{Pj}) \mathbf{u}_j + \mathbf{G}_P \mathbf{p} = \mathbf{F}_P \quad (12)$$

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}_S) \dot{\mathbf{T}} + (\mathbf{H} + \mathbf{K} + \mathbf{H}_S) \mathbf{T} = \mathbf{L} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_S \quad (13)$$

ここで, \mathbf{u}_i は節点流速ベクトル, \mathbf{p} は節点圧力ベクトル, \mathbf{T} は節点温度ベクトルを表す。 \mathbf{M} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} , \mathbf{D} , \mathbf{C} はそれぞれ, Navier-Stokes 方程式における時間, 移流, Brinkman-penalization, 圧力, 粘性, 連続の各係数行列を表す。また, $\mathbf{\Sigma}_i$, \mathbf{F}_i , \mathbf{L} , \mathbf{Q} はそれぞれの境界でのトラクション項, 外力項, 熱流速項, 熱の発生項を表す。添字 S, P はそれぞれ SUPG 法, PSPG 法に起因する項を表している。

(2) 時間方向の離散化

空間離方向の離散化を施した式 (11), (12), (13) に対し, 時間方向の離散化を行う。時間方向の離散化において, 時間微分項は次のように評価する。

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \frac{\mathbf{u}_i^{(n+1)} - \mathbf{u}_i^{(n)}}{\Delta t} \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\mathbf{T}^{(n+1)} - \mathbf{T}^{(n)}}{\Delta t} \quad (15)$$

また, 流速, 温度に対して Crank-Nicolson 法を適用し, また圧力と式 (12) の第 1 項を陰的に取り扱うと, 式 (11), (12), (13) は以下ようになる。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_S) \frac{\mathbf{u}_i^{(n+1)} - \mathbf{u}_i^{(n)}}{\Delta t} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_S + \mathbf{B} + \mathbf{B}_S) \mathbf{u}_i^{(n+\frac{1}{2})} - (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{Si}) \mathbf{p}^{(n+1)} + \mathbf{D}_{ij} \mathbf{u}_j^{(n+\frac{1}{2})} = \mathbf{\Sigma}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Si} \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_j \mathbf{u}_j^{(n+1)} + \mathbf{M}_{Pj} \frac{\mathbf{u}_j^{(n+1)} - \mathbf{u}_j^{(n)}}{\Delta t} + (\mathbf{A}_{Pj} + \mathbf{B}_{Pj}) \mathbf{u}_j^{(n+\frac{1}{2})} + \mathbf{G}_P \mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{F}_P \quad (17)$$

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}_S) \frac{\mathbf{T}^{(n+1)} - \mathbf{T}^{(n)}}{\Delta t} + (\mathbf{H} + \mathbf{K} + \mathbf{H}_S) \mathbf{T}^{(n+\frac{1}{2})} = \mathbf{L} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_S \quad (18)$$

ここで, $\mathbf{u}_i^{(n+\frac{1}{2})}$, $\mathbf{T}^{(n+\frac{1}{2})}$, は以下の式で求める。

$$\mathbf{u}_i^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{(n+1)} + \mathbf{u}_i^{(n)}) \quad (19)$$

$$\mathbf{T}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\mathbf{T}^{(n+1)} + \mathbf{T}^{(n)}) \quad (20)$$

また、移流速度 \bar{u}_i は、2 次精度の Adams-Bashforth 法により以下のように近似し、陽的に求める。

$$\bar{u}_i = \frac{3}{2}u_i^{(n)} - \frac{1}{2}u_i^{(n-1)} \quad (21)$$

これまでの離散化過程により、方程式系 (16), (17) は流速ベクトルおよび圧力ベクトルを、また方程式系 (18) は温度ベクトルを求める連立一次方程式となる。未知量を左辺に、既知量を右辺に分離し、方程式系 (16), (17) および方程式系 (18) を以下のように記す。

$$\mathcal{A}_{\text{NS}} \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(n+1)} = \mathbf{b}_{\text{NS}} \quad (22)$$

$$\mathcal{A}_{\text{Eg}} \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(n+1)} = \mathbf{b}_{\text{Eg}} \quad (23)$$

ここで、 \mathbf{v}_{NS} は節点での速度および圧力を表すベクトル、 \mathbf{v}_{Eg} は節点温度を表すベクトルである。 $\mathcal{A}_{\text{NS}}, \mathcal{A}_{\text{Eg}}$ は係数行列、 $\mathbf{b}_{\text{NS}}, \mathbf{b}_{\text{Eg}}$ は既知のベクトルである連立一次方程式系 (22) および (23) の解法として、それぞれ GPBi-CG (Generalized Product-type method based on Bi-CG) 法、Bi-CG 法を用いる。

4. トポロジー最適化問題とその解法

(1) 密度法に基づく 2 相材料の表現

流体と固体の分布問題を考えるため、密度法によるトポロジー最適化の方法論に基づき、要素番号 e に対応する有限要素内部の材料密度 ϕ_e を次式のように定義する。

$$\phi_e \in [0, 1] \quad (24)$$

すなわち、 ϕ_e は要素毎に定義された密度であり、 $\phi_e = 1$ の場合に流体、 $\phi_e = 0$ の場合に固体、 $\phi_e \in (0, 1)$ の場合に流体と固体の中間領域を表す。

続いて、各要素の逆透過率、熱伝導率、単位体積あたりの熱容量をそれぞれ $\alpha_e, k_e, (\rho c)_e$ と表し、これらを密度 ϕ_e に関して補間する。

$$\alpha_e = \alpha_{\text{fluid}} + (\alpha_{\text{solid}} - \alpha_{\text{fluid}}) \frac{a(1 - \phi_e)}{a + \phi_e} \quad (25)$$

$$k_e = k_{\text{fluid}} + (k_{\text{solid}} - k_{\text{fluid}}) \frac{a(1 - \phi_e)}{a + \phi_e} \quad (26)$$

$$(\rho c)_e = (\rho c)_{\text{fluid}} + ((\rho c)_{\text{solid}} - (\rho c)_{\text{fluid}})(1 - \phi_e) \quad (27)$$

ここで、 a は材料補間を施した物性値の関数形を調節するパラメータであり、本研究では常に $a = 0.1$ とする。単位体積あたりの熱容量 $(\rho c)_e$ に関しては線形補間を用いる。なお、流体の逆透過率は $\alpha_{\text{fluid}} = 0$ とする。

(2) 最適化問題

本研究で扱う熱・流体問題の最適化問題を一般的に以下のように記述する。

$$\text{minimize} \quad f_0(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(n)}, \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(n)}) \quad (28)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{R}_{\text{NS}}^{(n)}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(m)}, \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(m)}) = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\mathbf{R}_{\text{Eg}}^{(n)}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(l)}, \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(l)}) = \mathbf{0} \quad (30)$$

$$f_i(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(n)}, \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(n)}) < f_{i,\text{max}} \quad (31)$$

$$0 \leq \phi_e \leq 1 \quad (32)$$

ここで、 f_0 は目的関数、 $\mathbf{R}_{\text{NS}}^{(n)}$ は方程式系 (22) からなる残差、 $\mathbf{R}_{\text{Eg}}^{(n)}$ は方程式系 (23) からなる残差である。 f_i は制約関数、 $f_{i,\text{max}}$ は制約値、 N_{time} は時間ステップの総数、 N_{con} は制約関数の総数、 N_{des} は設計変数の総数である。 $\boldsymbol{\phi}$ は N_{des} 次元の密度ベクトルを表し、これが最適化問題の設計変数である。添字 n は時間ステップであり、1 から N_{time} までの整数を表す。添字 m は $n, n-1, n-2$ を、 l は $n, n-1$ を表す整数である。設計変数の更新アルゴリズムには、MMA (Method of Moving Asymptotes)[13] を用いる。

(3) 感度解析

本節では、非定常熱・流体問題に対する感度および随伴問題を示す。Michaleris et al.[11] による感度解析手法に基づく、感度は以下のように導出できる。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_{\text{NS}}^{(n)}(\boldsymbol{\phi}), \mathbf{u}_{\text{NS}}^{(n)}(\boldsymbol{\phi}))}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_{\text{NS}}^{(n)}, \mathbf{u}_{\text{Eg}}^{(n)})}{\partial \boldsymbol{\phi}} - \sum_{n=1}^{N_{\text{time}}} \left(\lambda_{\text{NS}}^{(n)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{NS}}^{(n)}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_{\text{NS}}^{(m)}, \mathbf{u}_{\text{Eg}}^{(m)})}{\partial \boldsymbol{\phi}} + \lambda_{\text{Eg}}^{(n)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{Eg}}^{(n)}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_{\text{NS}}^{(l)}, \mathbf{u}_{\text{Eg}}^{(l)})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right) \quad (33)$$

ここで、 f は目的関数および制約関数、 $\lambda_{\text{NS}}^{(m)}, \lambda_{\text{Eg}}^{(m)}$ は随伴ベクトルを表す。対応する随伴問題は、随伴ベクトルの終期値問題として以下のようになる。

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\text{NS}}^{(n)}}{\partial \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(n)}} \right] \lambda_{\text{NS}}^{(n)} = - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\text{NS}}^{(m)}}{\partial \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(m)}} \right] \lambda_{\text{NS}}^{(m)} - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\text{Eg}}^{(m)}}{\partial \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(n)}} \right] \lambda_{\text{Eg}}^{(m)} + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_{\text{NS}}^{(n)}} \right] \quad (34)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\text{Eg}}^{(n)}}{\partial \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(n)}} \right] \lambda_{\text{Eg}}^{(n)} = - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\text{Eg}}^{(l)}}{\partial \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(n)}} \right] \lambda_{\text{NS}}^{(l)} - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\text{Eg}}^{(l)}}{\partial \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(n)}} \right] \lambda_{\text{Eg}}^{(l)} + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_{\text{Eg}}^{(n)}} \right] \quad (35)$$

ここで、 $m = n+1, n+2, l = n+1$ である。この随伴ベクトルに関する方程式系は、第 N_{time} ステップから第 1 ステップまで、時間を遡って解かれる。求められた随伴ベクトルを式 (33) に代入すれば感度が求められる。

(4) 感度の精度検証

本節では、第 (3) 節で定式化した感度の精度について比較検証を行う。比較対象は、次式で表される有限差分近似 (finite difference approximation; FDA) により求められる感度である。

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_e} \approx \frac{f(\boldsymbol{\phi} + \Delta \boldsymbol{\phi}_e) - f(\boldsymbol{\phi})}{\Delta \phi_e} \quad (36)$$

ここで、 $\Delta \boldsymbol{\phi}$ は設計変数の微小な変動量を表し、 $\boldsymbol{\phi}_e$ は第 e 成分に $\Delta \phi$ 、その他の成分に 0 を持つベクトルである。続いて、随伴変数法に基づき導出した感度の精度検証を行うために用いた解析条件を説明する。図-1 に解析領

表-1 固体と流体の物性値

	熱伝導率 W/(mm・K)	比熱 J/(kg・K)	密度 kg/mm ³
固体	4.0×10^{-1}	4.0×10^2	8.0×10^{-6}
流体	1.0×10^{-3}	4.0×10^3	1.0×10^{-6}

	逆透過率 kg/(mm ³ ・s)	粘性係数 kg/(mm・s)	体膨張率 -
固体	1.0×10^{-3}	-	-
流体	0.0	1.0×10^{-6}	2.0×10^{-4}

域および境界条件，用いたメッシュを示す．解析領域には流入口と流出口を一つずつ設ける．青色は流体領域，灰色は設計領域，赤色は加熱領域を表す．流入境界では一様に，一定の流入流速 $u_{in} = 1.0 \text{ mm/s}$ および一定の温度 $T_{in} = 10^\circ\text{C}$ を与える．流出境界ではトラクション・フリー境界条件 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} \text{ N/mm}^2$ および断熱条件 $q = 0 \text{ W/mm}^2$ を与える．また，その他の境界では滑り無し境界条件 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ mm/s}$ および断熱条件とする．加熱領域においては，一定の加熱率 $Q_{in} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ W/mm}^3$ を与える．解析領域の初期温度は 20°C ，加熱時間は 200 s ，時間刻み幅は $\Delta t = 1 \text{ s}$ とする．外力項は $f_i^{ext} = 0$ とする．設計変数の分布は設計領域に一様に 1.0 とし，設計変数の変動量は $\Delta\phi = -1.0 \times 10^{-4}$ とする．

感度の精度検証は，加熱後における加熱領域の平均温度および流体のエネルギー損失の2つの関数に関する感度に対して行う．加熱後における加熱領域の平均温度は次式で表される．

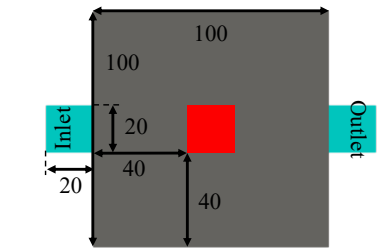
$$f = \frac{\int_{\Omega} w T d\Omega}{\int_{\Omega} w d\Omega} \quad \text{at } t = t_T \tag{37}$$

ここで， w は重み係数で，加熱部で 1 ，それ以外で 0 をとる． t_T は加熱時間であり， $t_T = 200$ とする．また，流体のエネルギー損失は以下のように定義される．

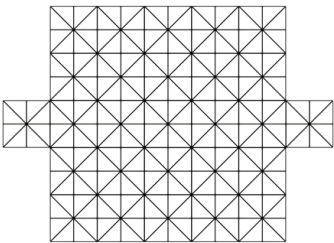
$$f = \int_0^{t_T} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \alpha u_i^2 d\Omega dt \tag{38}$$

流体と固体の物性値は，表-1 に示す．解析領域は，216 個の3 角形1 次要素で離散化する．節点の総数は133 個，設計変数の総数は200 個である．

上記の条件において，感度を計算した結果を図-2 に示す．この図は，横軸に要素番号，縦軸に初回の最適化ステップの感度の値を示したものである．図-2(a) は式 (37) で定義される加熱後における加熱領域の平均温度に関する感度，図-2(b) は式 (38) で定義される流体のエネルギー損失に関する感度の計算結果である．この図より，随伴変数法 (AVM) に基づく感度と有限差分近似 (FDA) に基づく感度は，いずれの目的関数に対してほぼ一致している．これより，今回導出した感度は高い精度を有していることが確認された．

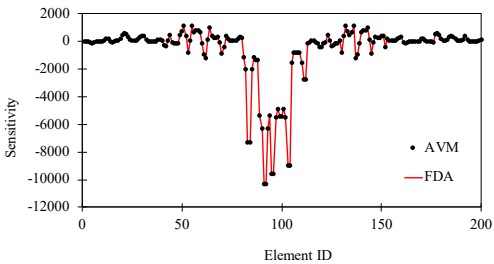


(a) 寸法 (単位 : mm) および境界条件

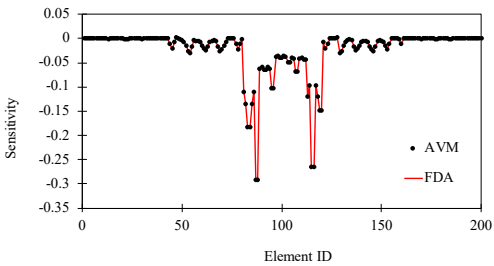


(c) メッシュ

図-1 解析条件



(a) 加熱後における加熱領域の平均温度に関する感度



(b) 流体のエネルギー損失に関する感度

図-2 随伴変数法 (AVM) と有限差分近似 (FDA) による感度の比較

(5) フィルタリング

本研究では，Lazarov and Sigmund[14] による密度フィルターに基づき，フィルタリング処理された密度分布 $\tilde{\phi}$ を以下の偏微分方程式の解として与える．

$$\begin{aligned} -r^2 \Delta \tilde{\phi} + \tilde{\phi} &= \phi \quad \text{on } \Omega_X \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \boldsymbol{n}} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_X \end{aligned} \tag{39}$$

ここで， $\phi, \tilde{\phi}$ は，それぞれフィルタリング処理前後の密度， r はフィルタリング半径の役割を持つ正値の係数

である, Ω_χ は設計領域, Γ_χ は設計領域の境界を表す. フィルタリングはチェッカーボードパターンや設計解のメッシュ解像度への依存性の問題を解決するものの, 設計解に中間密度が残存することとなる. そのため, 本研究では projection 法 [15] を用いる.

$$\hat{\phi}_e = \frac{\tanh(\beta_p \eta_p) + \tanh(\beta_p (\tilde{\phi}_e - \eta_p))}{\tanh(\beta_p \eta_p) + \tanh(\beta_p (1 - \eta_p))} \quad (40)$$

ここで, β_p, η_p はパラメータ, $\hat{\phi}$ は projection 処理後の密度である.

フィルタリングと projection 処理を用いる場合, 目的関数および制約関数の感度式は連鎖率により以下のように修正する.

$$\frac{\partial f(\hat{\phi}(\tilde{\phi}(\phi)))}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial \hat{\phi}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tilde{\phi}} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi} \quad (41)$$

5. 最適化計算例

(1) 自然対流問題

本手法を自然対流問題に適用する. 温度変化により生じる浮力は Boussinesq 近似を用いて評価し, Navier-Stokes 方程式 (1) に外力項として下式を加える.

$$f_i^{\text{ext}} = \hat{\phi}^s f_i^{\text{buo}} \quad (42)$$

式 (42) の形から分かるように, 固体領域 ($\hat{\phi} = 0$) においてこの外力項は働かず, 流体領域 ($\hat{\phi} = 1$) ではこの外力項により流れが駆動される. s はペナルティパラメータで $s = 10$ とする. f_i^{buo} は浮力項であり下式で表される.

$$f_i^{\text{buo}} = \rho g_i \beta (T - T_0) \quad (43)$$

ここで, g_i は重力加速度, β は体膨張率, T_0 は参照温度を表す.

図-3 に, 解析領域および境界条件を示す. 解析領域は, 黒色で示す固体領域, 青色で示す流体領域, 灰色で示す設計領域で構成される. 固体領域は加熱領域とする. 解析領域の境界全体に滑り無し条件 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ m/s² を与える. 下部の境界に断熱条件 $q = 0$ W/mm², その他の境界で温度 $T = 20$ °C を規定する. 加熱領域においては, 一定の加熱率 $Q_{\text{in}} = 2.0 \times 10^{-4}$ W/mm³ を与える. 解析領域の初期温度および参照温度は 20 °C, 重力加速度は 9.81×10^3 mm/s², 設計変数の初期値は, 設計領域に一様に 0.6 とする. 加熱時間は $t_T = 60, 600$ s の 2 通りを設定する. 時間刻み幅は $\Delta t = 0.5$ s とする. 流体と固体の物性値は表-1 に示した値を用いる.

加熱部の温度上昇抑制を意図し, 目的関数は式 (37) とする. また, 制約条件として, 固体の体積制約を次式のように設定する.

$$f_1 = \int_{\Omega} (1 - \hat{\phi}) d\Omega \leq V_{\text{max}} \quad (44)$$

ここで, V_{max} は固体体積の制約値であり設計領域の 40% の体積とする. 解析領域は, 180960 個の 3 角形 1 次要素で離散化する. 設計変数の総数は 50400 個である. 密度フィルターにおける係数は $r = 0.5$ mm とする. projection 処理は 400 回目の最適化ステップから始める. 第 400 最

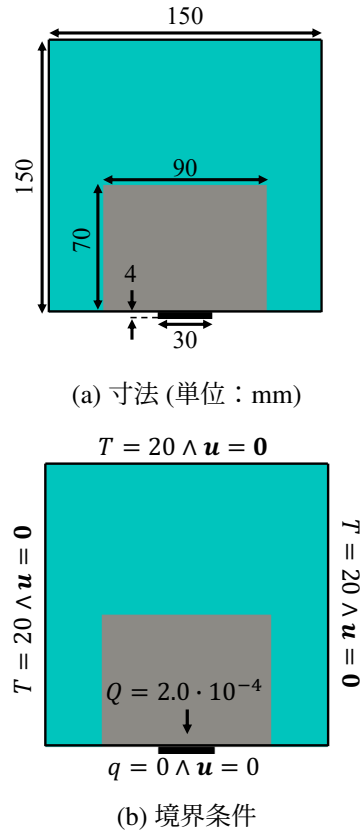


図-3 寸法および境界条件

適化ステップには $\beta_p = 1$ とし, 以降は 1 最適化ステップ進むごとに β_p を 1.2 倍する. また, $\eta_p = 0.5$ とする.

図-4 に加熱時間 60, 600 秒を設定して得られたトポロジーとその周りの流線, 温度分布を示す. 図-4(a), (b) の流線と温度分布はともに, 600 秒間の加熱後の分布である. 表-2 は, それぞれの加熱時間にて得られたトポロジーの目的関数値と固体の体積および固体体積の上限値を示す. ここで, 目的関数値は時刻 60, 600 秒おける値をともに示している. $t_T = 60$ と $t_T = 600$ のトポロジーの目的関数値を比較すると, 時刻 60 秒では $t_T = 60$ のトポロジーの目的関数値の方が小さく, 逆に時刻 600 秒では $t_T = 600$ のトポロジーの目的関数値の方が小さい. この結果は, 想定した加熱時間で目的関数値を最小化するトポロジーを求めるという問題設定上, 妥当な結果である. $t_T = 60$ のトポロジーの特徴として, 熱源付近に固体を集めるような構造が見られる. この特徴は, 短い加熱時間に加熱部の平均温度上昇を低減するのに効果的であるものと考えられる. また, 固体の枝構造が多数見られ, これは既往の熱伝導問題におけるトポロジー最適化の結果とも一致する. 一方, $t_T = 600$ のトポロジーは, $t_T = 60$ より固体の枝構造が少なく, 構造の周りで生じる流体の流れを妨げないような特徴がある. これは, Alexandersen et al.[3] により示されているように, 加熱部の温度上昇を抑制する上で対流の寄与が大きくなると, 固体の枝構造が少なくなる結果と一致している.

参考文献

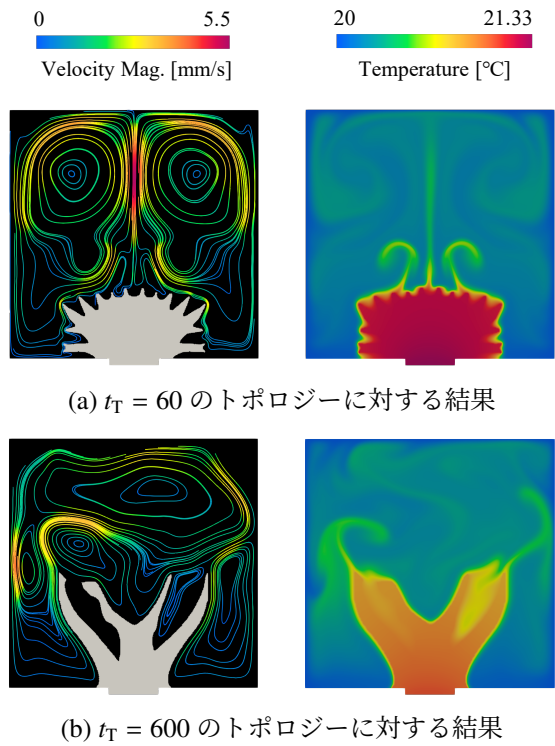


図-4 60, 600 秒の加熱時間を想定した際に得られたトポロジーと時刻 600 秒における流線および温度分布

表-2 目的関数および制約関数値

	$t_T = 60$	$t_T = 600$
$f_0 _{t=60}$	0.435	0.442
$f_0 _{t=600}$	1.322	1.054
f_1	2.518×10^3	2.417×10^3
V_{\max}	2.520×10^3	2.520×10^3

(2) 強制対流問題

強制対流問題に対する最適化計算例は誌面の都合上割愛し、講演会当日に示す。

6. 結論

本研究では、定常問題を扱った先行研究 [3] を拡張する形で非定常熱・流体問題のトポロジー最適化手法を構築し、その妥当性を検証した。感度解析においては、Michaleris et al.[11] が示した一般的な感度解析手法に基づき、熱・流体問題における具体的な感度の定式化を行なった。本手法を強制対流および自然対流場における熱コンプライアンス最小化問題に適用し、得られたトポロジーの性能や特徴について調べた。結果として、加熱時間によって異なるトポロジーが得られ、その性能は妥当な結果を示した。

[1] Dede, E. M. : Multiphysics Topology optimization of heat transfer and fluid flow systems, In Proceedings of the COMSOL Conference 2009, Boston, MA, USA, pp.8–10, 2009.

[2] Yoon, G. H. : Topological design of heat dissipating structure with force convective heat transfer, *J. Mech. Sci. Technol.*, Vol.24, No.6, pp.1225-1233, 2010.

[3] Alexandersen, J., Sigmund, O., Andreasen, C., Aage, N. : Topology optimisation for coupled convection problems, DTU Mechanical Engineering, 2013.

[4] Alexandersen, J. et al. : Topology optimisation for natural convection problems, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.76, No.10, pp.699-721, 2014.

[5] Alexandersen, J. et al. : Large scale three-dimensional topology optimization of heat sinks cooled by convection, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol.100, pp.876-891, 2016.

[6] Dilgen, S. B. et al. : Density based topology optimization of turbulent flow heat transfer systems, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.57, pp.1905–1918, 2022.

[7] Coffin, P., Maute, K. (2016) : A level-set method for steady-state and transient convection problems, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.53, pp.1047-1067, 2016.

[8] Yaji, K. et al. : Large-scale topology optimization incorporating local-in-time adjoint-based method for unsteady thermal-fluid problem, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.58, pp.817–822, 2018.

[9] Zeng, T. et al. : Topology optimization of heat sinks for instantaneous chip cooling using a transient pseudo-3D thermofluid model, *Int. J. Heat Mass Transf.*, p. 119681, 2020.

[10] Xie, S. et al. : Topology optimization for unsteady flows accompanying heat transfer, Transactions of JASCOME, Vol.20, p.15-201219, 2020.

[11] Michaleris, P. et al. : Tangent operators and design sensitivity formulations for transient nonlinear coupled problems with applications to elasto-plasticity, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.37, pp.2471-2499, 1994.

[12] Borrvall, T., Petersson, J. : Topology optimization of fluids in Stokes flow, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.41, pp.77-107, 2003.

[13] Svanberg, K. : The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.24, pp.359-373, 1987.

[14] Lazarov, B. S., Sigmund, O., : Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.86, pp.765-781, 2011.

[15] Wang, F. et al. : On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization, *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol.43, No.6, pp.767-784, 2011