

動的粘弾性特性を考慮した マルチマテリアルトポロジー最適化

Multi-material transient topology optimization considering viscoelasticity

杉浦拓実¹⁾ 干場大也²⁾ 西口浩司³⁾ 加賀紀彦⁴⁾ 早川光太郎⁵⁾ 門脇弘⁶⁾ 加藤準治⁷⁾
Takumi Sugiura, Hiroya Hoshiba, Koji Nishiguchi, Norihiko Kaga, Kotaro Hayakawa, Hiroshi Kadowaki,
and Junji Kato

¹⁾名古屋大学 大学院工学研究科 (〒 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町,

E-mail: sugiura.takumi.y5@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

²⁾博(工)名古屋大学 大学院工学研究科 助教 (E-mail: hiroyahoshiba@nagoya-u.jp)

³⁾博(工)名古屋大学 大学院工学研究科 准教授 (E-mail: kojinishiguchi@civil.nagoya-u.ac.jp)

⁴⁾株式会社ブリヂストン (E-mail: norihiko.kaga@bridgestone.com)

⁵⁾株式会社ブリヂストン (E-mail: kotaro.hayakawa@bridgestone.com)

⁶⁾Ph. D. 株式会社ブリヂストン (E-mail: hiroshi.kadowaki@bridgestone.com)

⁷⁾Dr.-Ing. 名古屋大学 大学院工学研究科 教授 (E-mail: junjikato@civil.nagoya-u.jp)

In recent years, advances in additive manufacturing technology have made it possible to print composite rubber structures. Rubber structures play an important role in damping vibrations or absorbing shocks, and additive manufacturing technology is expected to improve these performances. This research proposes a topology optimization method using a basic material model to control dynamic viscoelastic response. A density-based material interpolation scheme and sensitivity analysis method were proposed, and numerical optimizations are conducted to suppress deformation in different frequencies. The optimization results show that complex typologies are obtained by considering viscoelasticity and inertia.

Key Words : Topology optimization, transient problem, viscoelasticity, sensitivity analysis

1. 諸言

ゴムは弾性と粘性の2つの特性を持つ粘弾性材料であり、振動抑制や衝撃吸収部材などに使用される。従来、これらゴム部材の設計は、製造上の制約から単一材料を基本としてきた。したがって、材料配合を調整し、所与の性能を満たす材料物性値を得ることに重きが置かれていた。

一方で近年、積層造形技術の進歩によって、様々な材料の造形が可能となり、現行製品の代替として積層造形物を使用するための研究開発が盛んに行われている。特に、ゴムやエラストマーにおいては、数十マイクロメートル単位かつマルチマテリアルという高い自由度の造形が可能となり、これは単一ゴムからなる現行のゴム部材の力学的性能を超える可能性を示唆するものである。そこで本研究では、ゴム部材のマルチマテリアル積層造形を念頭に、粘弾性特性を有する複数材料の配置（位相）を求めるためのトポロジー最適設計法を開発する。

ゴムの変形挙動は、粘弾性特性に起因するひずみ速度依存性を有し、トポロジー最適化においてもこれを考慮する必要がある。粘弾性によるひずみ速度依存性を考慮したトポロジー最適化に関する既往研究については、Yun and Youn [1] や Zhang and Khandelwal [2] による報告文がある。これらの研究では、弾性材料と粘弾性材料で構成されたマルチマテリアルを対象として粘性

散逸エネルギー最大化を目的としている。また、Ogawa and Yamada [3] は、異なる緩和時間を持つ2つの粘弾性材料を対象とした材料内挿補間手法を提案し、クリープ変形最小化を目的関数とする2相材料最適化を行っている。しかし、これらの研究報告は、慣性の影響を無視できる準静的な荷重条件を仮定している。一方で、動的粘弾性挙動を考慮した最適設計法に関しては、Yun and Youn [4] や Ding et al. [5] が随伴変数法による感度解析手法を提案しているが、解析的感度の精度検証に留まり、実際の最適化を行っていない。

以上を踏まえ、本研究では、動的粘弾性挙動の制御を目的とするトポロジー最適化のための基礎的手法を構築する。本研究では、ゴムの粘弾性挙動を現象論的に再現可能な一般化線形 Maxwell モデルを使用し、密度法を基本とした新しい材料内挿補間手法を提案する。また、discretized-then-differentiate approach [6] を用いて、解析的感度を定式化する。最後に、2次元および3次元問題の周期荷重作用下における最適化計算例を示し、提案手法の有用性について検証を行う。

2. 粘弾性材料の有限要素解析

本研究では粘弾性構成則を、図-1 に示す一般化線形 Maxwell モデルを用いて定式化する。一般化線形 Maxwell モデルは、粘性を持たない長期バネ1つと粘性を持つ複数の Maxwell 成分が並列に結合されたモ

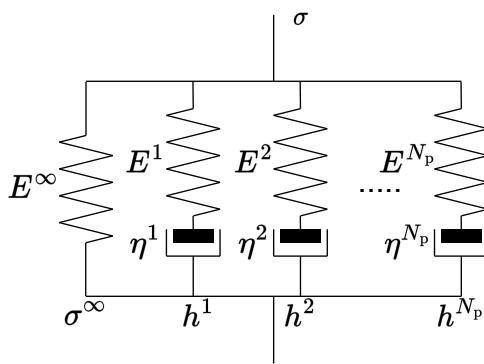


図-1 一般化線形 Maxwell モデル

ルである。ここで、 E^∞ は長期バネのヤング率、 E^α 、 \mathbf{h}^α および η^α はそれぞれ各 Maxwell 成分のヤング率、応力、粘性係数であり、上添え字の α は Maxwell 要素の番号、 N_p は Maxwell 成分の総数である。この材料構成則は、各 Maxwell 成分においてヤング率が定義されたため、圧縮性を有する。しかし、一般的にゴムは非圧縮性を示すことから、その挙動解析には、非圧縮性構成則による u/p 混合法が用いられることが多い。本研究では、最適化手法の開発を主目的としていることから、感度解析の簡素化を意図して、図-1 に示したモデルを使用し、ポアソン比を 0.49 とすることで、微圧縮性の定式化を仮定する。

時刻 t における各 Maxwell 成分が受け持つ応力は次式のように、畳み込み積分で表される。

$$\mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{D} \exp\left(-\frac{t-r}{\tau}\right) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial r} dr \quad (1)$$

ただし、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソル、 r は畳み込み積分の変数、 τ は緩和時間、 \mathbf{D} は弾性テンソルである。また、全応力 σ は、長期応力 σ^∞ と各 Maxwell 応力 \mathbf{h}^α の和となる。

$$\sigma = \sigma^\infty + \sum_{\alpha=1}^{N_p} \mathbf{h}^\alpha \quad (2)$$

つり合い式は、以下の運動方程式であり、式(1)の材料構成則が含まれる。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{M} は全体質量マトリックス、 \mathbf{a} は節点加速度ベクトル、 $\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u})$ は全体内力ベクトル、 \mathbf{F}^{ext} は全体外力ベクトルである。上式を Newmark-β 法で時間離散化し、各時間ステップにおける解を得る。

3. 密度法を用いた 2 相材料表現法

本研究では、密度法を基本とした 2 相材料の内挿補間法を提案する。まず、2 つの粘弹性材料に対して、Maxwell 成分の数 N_p および各 Maxwell 成分の緩和時間 τ^α を一定とする仮定をおく。この仮定により、内挿するべき材料パラメータは、長期バネ E^∞ および Maxwell 成分のヤング率 E^α のみとなり、後述する随伴変数法を

用いた感度解析の定式化が簡素となる。内挿補間は以下の式を用いる。

$$E^\infty(\bar{s}) = \begin{cases} E_1^\infty + (E_2^\infty - E_1^\infty)\bar{s}^p & \text{if } E_2^\infty > E_1^\infty \\ E_2^\infty + (E_1^\infty - E_2^\infty)\bar{s}^p & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

$$E^\alpha(\bar{s}) = \begin{cases} E_1^\alpha + (E_2^\alpha - E_1^\alpha)\bar{s}^p & \text{if } E_2^\alpha > E_1^\alpha \\ E_2^\alpha + (E_1^\alpha - E_2^\alpha)\bar{s}^p & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

ただし、 \bar{s} はフィルター処理された設計変数、下添字の 1, 2 は材料識別番号、 p はペナルティーパラメータである。

4. 最適化問題の設定および感度解析

本研究では、以下のように最適化問題を設定した。

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \int_0^T \mathbf{u}_{\text{tar}}^2 dt \\ \text{s.t.} \quad & g = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \bar{s}_e d\Omega_e - V_0 \leq 0 \\ & 0 \leq \bar{s}_e \leq 1 \quad e = 1, 2, \dots, N \\ & \mathbf{R} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{u}_{tar} は、荷重作用点の自由度のみ変位の値を持ち、それ以外の成分は零を有するベクトルである。したがって、目的関数は変位の 2 乗ノルムの時間積分の最小化であり、入力外力に対する応答を低減するという意味合いを持つ。また、 N は要素の総数、下添え字の e は各有限要素を意味し、 g は体積制約式、 Ω_e は各有限要素領域、 V_0 は材料 2 が設計領域において占める体積の上限値を表す。また、 \mathbf{R} は式(3)の離散化後の残差ベクトルであり、詳細は紙面の都合上省略する。感度解析は discretize-then-differentiate approach [6] を用いた定式化を行う。導出の詳細は紙面の都合上省略するが、まず、随伴ベクトル λ, μ, η を導入し、新たに目的関数 \tilde{f} を定義する。次に、 \tilde{f} を全時間ステップで偏微分し、陰的微分項である $\partial \mathbf{u} / \partial \bar{s}$ 、 $\partial \mathbf{v} / \partial \bar{s}$ 、 $\partial \mathbf{a} / \partial \bar{s}$ を消去できる随伴ベクトルを求める随伴問題を解く。ただし、 \mathbf{v} は節点速度ベクトルである。最終的に次式のような λ および $\partial \mathbf{F}^{\text{int}} / \partial \bar{s}_e$ で表される感度が導出される。

$$\frac{d\tilde{f}}{d\bar{s}_e} = \sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_k^{\text{int}}}{\partial \bar{s}_e} \quad (7)$$

ここで、 n は時間ステップの総数、 k は各時間ステップを示す。

5. 数値計算例

最適化結果の一例として、図-2 に示す正方形および立方体領域の一面固定、反対の面に周期的な分布荷重が作用する問題を紹介する。ただし、2 次元問題は、平面ひずみ状態を仮定している。使用する 2 つの材料は、ポアソン比 0.49、質量密度 10.0 g/cm³ であり、ヤング率および緩和時間は表-1 に示す。なお、本計算例で使用した材料物性値は実際のゴム材料に対し、質量密度が大きく、ヤング率が小さい。これは剛性に対して、慣性の影響を大きくすることで、提案手法の有用性の検

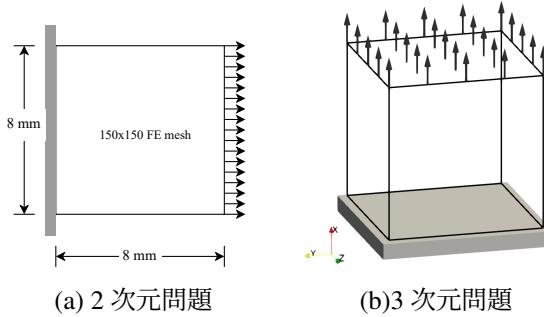


図-2 設計領域

		表-1 材料物性	ヤング率 [Pa]	緩和時間 [sec]
		材料 1	材料 2	
長期バネ E^∞		8.1×10^3	3.0×10^4	-
Maxwell 成分 E^α, τ^α		3.0×10^5	2.1×10^6	3.1×10^{-3}
		1.0×10^0	2.9×10^5	1.3×10^{-2}
		1.6×10^4	2.3×10^5	5.4×10^{-2}
		6.5×10^3	8.4×10^4	2.2×10^{-1}
		1.9×10^3	2.7×10^4	9.3×10^{-1}
		9.3×10^3	2.6×10^4	3.8×10^0

証と最適化結果の比較を容易にするためで、設計変数の更新は、Method of Moving Asymptotes (MMA) [7]を使用した。

(1) 2 次元問題

時間領域 $t \in [0, T]$ に対し、外力として、 $\theta \sin(10\pi t/T)$ で表される 5 周期分の分布荷重を作成させる。周期荷重の周波数は、0.1 Hz と 1000 Hz の 2 種類とし、どちらも 100 ステップで時間離散化する。また、荷重係数 θ はそれぞれ 0.5 N/mm^2 , 20 N/mm^2 とする。

目的関数値の推移および最適化結果をそれぞれ 図-3 および 図-4 に示す。図-3 から、0.1, 1000 Hz とともに、目的関数は単調に減少しており、問題なく最適化が行われていることがわかる。

また、図-4(a) から、0.1 Hz という、内力に対して慣性力の影響が小さくなるような準静的な荷重作用状態においては、ヤング率の大きい材料 2 が構造の主要部に配置される、剛性最大化に近い形状を得られていることがわかる。一方で、図-4(b) から、1000 Hz のような慣性の影響が大きい問題ではこのような傾向は見ら

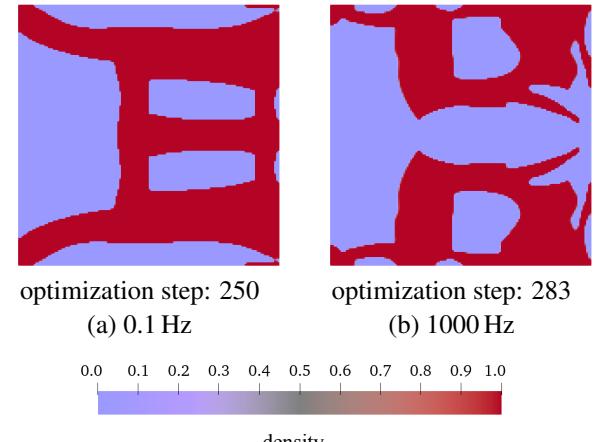


図-4 2 次元問題: 最適化結果

れず、ヤング率が大きい材料 2 が局的に細くなるヒンジ機構が現れた。さらに、動的問題特有の中間密度が残らない結果となった。これは、本研究においては、質量密度を内挿していないことが要因であると考えられる。

以上の結果から、周波数に応じて最適化結果が変化することが示された。

(2) 3 次元問題

2 次元問題と同様に、立方体の一面を固定し、反対側の面に周期的な分布荷重を作成させた。1/4 対称条件で、 $80 \times 40 \times 40$ でメッシュ分割し、0.1 および 1000 Hz の周期荷重を作成させる。また、計算負荷軽減のために、2 周期を 40 ステップで離散化する。

目的関数値の推移を 図-5 に示す。図-5 から、目的関数値は 2 次元問題と同様に、単調に減少しており、問題なく最適化が行われていることがわかる。次に、図-6 および 図-7 に、それぞれ 0.1 Hz および 1000 Hz の周期荷重における最適化結果を示す。ただし、図中の直方体で示した内部を、除外して可視化している。図-6 から、0.1 Hz の周期荷重が作用する条件下で得られるトポロジーは、ヤング率が大きい材料 2 が構造の主要部に配置されていることから、2 次元問題 0.1Hz の結果と同様に、剛性最大化に近い形状をしていることがわかる。一方で、図-7 から、1000 Hz の周期荷重の場合、構造の下部は 0.1 Hz と同様にヤング率の高い材料 2 が構造の主要部にあることがわかる。しかし、構造の上部にはそのような傾向は見られず、荷重載荷面である

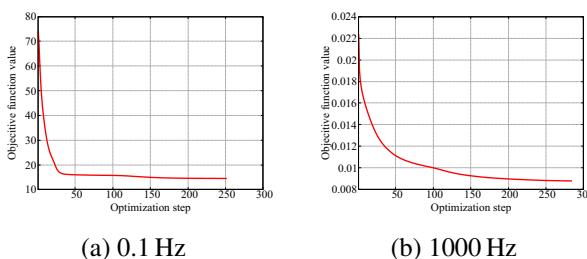


図-3 2 次元問題: 目的関数の推移

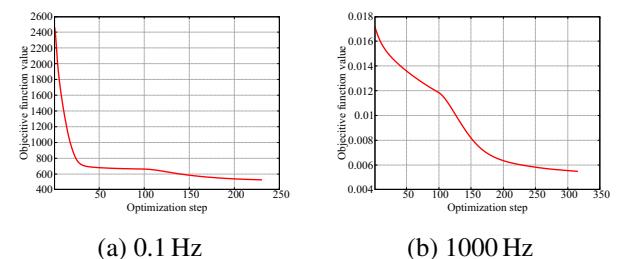


図-5 3 次元問題: 目的関数の推移

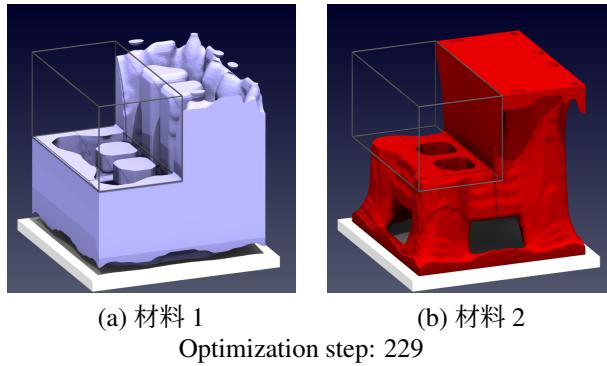


図-6 3次元問題: 最適化結果 (0.1 Hz)

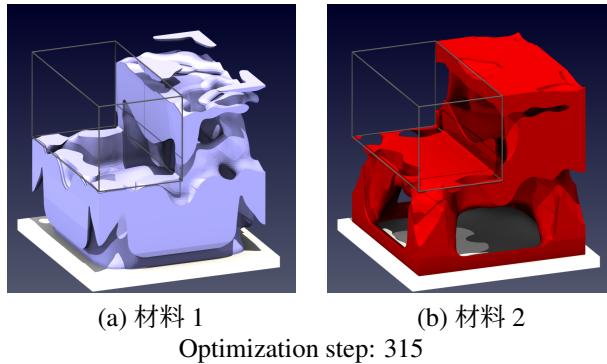
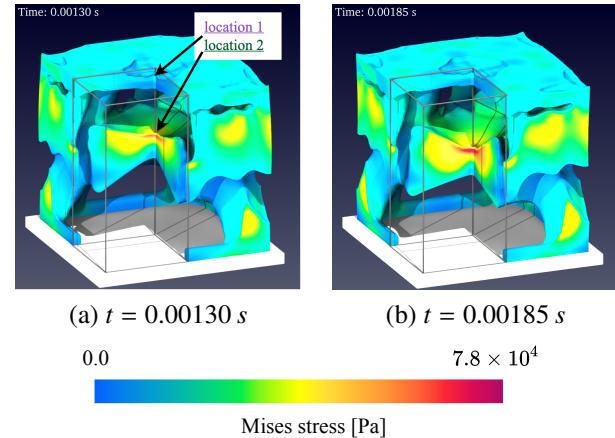


図-7 3次元問題: 最適化結果 (1000 Hz)

上端付近に材料1が存在することがわかる。このことから、1000 Hzのような高周波数の荷重が作用する条件下では、構造の剛性が低くなる柔構造が得られたことがわかった。

次に、図-8に、1000 Hzにおける、 $t = 0.00130\text{ s}$ および $t = 0.00185\text{ s}$ 時の材料2の変形図およびMises相当応力を示す。ただし、比較を容易にするために変位のスケール表示を3倍にしている。また、図-9に、図-8(a)に示した2つの箇所の変位-時間関係を示す。図-8から、構造中央部に材料2が配置されており、これが独立して大きく振動していることがわかる。さらに、図-9から、この独立した機構は、入力外力の荷重係数および中央上部の変位と逆位相の振動をしていることがわかる。しがたって、マスダンパーとして、変形を抑制するような構造が得られたといえる。

以上から、3次元問題でも周波数に応じてトポロジーが変化することが示された。

6. 結論

本研究では、ゴム材料のための動的粘弾性挙動の制御を目的とした、基礎的なトポロジー最適化手法の開発を行った。一般化線形 Maxwell モデルを用いた、材料内挿補間法の提案および動的問題のための感度解析手法の構築を行った。2次元および3次元の周期荷重下における荷重載荷点の変位最小化を目的とし、4つの最適化計算を行った。0.1 Hzのような低周波の入力外力に対しては、慣性の影響は小さいため、準静的な問題に近い荷重条件となる。その結果、ヤング率の大きい材料が支配的となる剛性最大化に近いトポロジーが得

図-8 1000 Hzにおける変形図およびMises応力

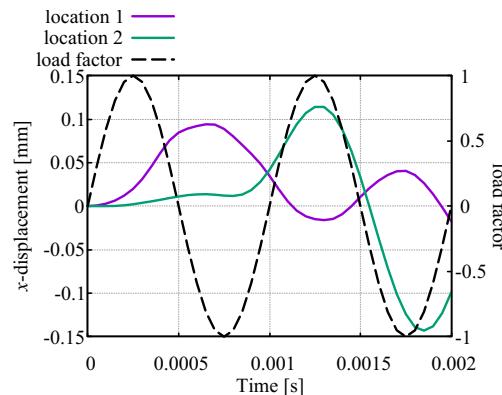


図-9 時間-変位曲線

られた。一方で、1000 Hzという、高周波の変動荷重がある場合は、慣性の影響が大きくなり、その変位を打ち消すようなヒンジ機構およびマスダンパーを呈する柔構造が得られた。この結果の解釈については、動力学的に正しく、理解しやすいものであると同時に、提案手法の有用性および妥当性を示すものであると言える。今後は、有限変形への拡張および非圧縮性の導入など、ゴムの実挙動をより正確に再現できる材料モデルを導入することが望まれる。

参考文献

- [1] Yun, K.S. and Young, S.K.: Multi-material topology optimization of viscoelastically damped structures under time-dependent loading, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.123, pp.9-18, 2017.
- [2] Zhang, G. and Khandelwal, K.: Design of dissipative multimaterial viscoelastic - hyperelastic systems at finite strains via topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.119, pp.1037-1068, 2018.
- [3] Ogawa, S. and Yamada, T.: Minimizing creep deformation via topology optimization, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.207, p.103758, 2022.
- [4] Yun, K.S. and Youn, S.K.: Design sensitivity analysis for transient response of non-viscously damped dy-

- namic systems, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.55, pp.2197-2210, 2017.
- [5] Ding, Z. et al.: Design sensitivity analysis for transient responses of viscoelastically damped systems using model order reduction techniques, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.64, pp.1501-1526, 2021.
- [6] Ogawa, S. and Yamada, T.: Topology optimization of dynamic problems based on finite deformation theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.122, pp.4486-4506, 2021.
- [7] Svanberg, K.: The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, pp.359-373, 1987.