

# 三次元HPM四面体要素の導入と コンクリートのひび割れ解析への適用性検討

Implementation of 3D HPM tetrahedral elements  
and examination of applicability to concrete crack analysis

上林厚志<sup>1)</sup>, 藤原良博<sup>2)</sup>, 塩見忠彦<sup>3)</sup>, 竹内則雄<sup>4)</sup>

Atsushi Kambayashi, Yoshihiro Fujiwara, Tadahiko Shiomi and Norio Takeuchi

1) 工博 (株)竹中工務店 技術研究所 (〒270-1395 千葉県印西市大塚1-5-1, E-mail: kanbayashi.atsushi@takenaka.co.jp)

2) 工博 (株)マインド (〒274-0825 千葉県船橋市前原西7-17-19-402, E-mail: fujiwara.yoshihiro@3d-lab.jp)

3) Ph. D. (株)マインド (〒274-0825 千葉県船橋市前原西7-17-19-402, E-mail: shiomi.tadahiko@3d-lab.jp)

4) 工博 法政大学教授 (〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-33, E-mail: takeuchi@hosei.ac.jp)

In order to implement tetrahedral elements to three-dimensional cracking problems using hybrid penalty method (HPM), which is capable of cracking analysis of concrete in two-dimensional analysis and its accuracy was verified. In addition, crack analysis is performed using a constitutive model that considers crack fracture energy, and its applicability is examined. .

**Key Words :** Hybrid-type Penalty Method, Discrete Crack, Concrete, Tetrahedral Elements

## 1. はじめに

コンクリート部材は早期のひび割れ進展状況が最終的な破壊性状に影響を及ぼすことがあるため、ひび割れ破壊エネルギーを考慮するとともに、ひび割れ解放力によりひび割れが進展する現象を精度よく追える解析手法が必要となる。

著者らはハイブリッド型ペナルティ法 (HPM) [1][2]にひび割れ破壊エネルギーと解放応力を考慮できる機能を追加し、コンクリート部材の二次元問題に対する適用性を示した[3][4]。コンクリート部材のひび割れ破壊は3次元的な破壊面を示すものもあるため、同手法の3次元化が必要である。

本論文ではHPMに四面体要素を導入し、ひび割れ破壊エネルギーと解放力を考慮できる3次元解析を可能とし、その解析結果の検証と妥当性を確認し、コンクリート部材解析への適用性の検討を行っている。

## 2. 支配方程式とハイブリッド型仮想仕事の原理

はじめにHPMの概略を示す。ハイブリッド型の仮想仕事式は要素内応力と物体力による仕事と、要素境界面上における変位の連続性に関する付帯条件による項から式(1)のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left( \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) \\ & - \sum_{s=1}^N \left( \delta \int_{\Gamma_{<s>}} \boldsymbol{\lambda}_{<s>} \cdot \left( \mathbf{u}_{<s>}^{(s_a)} - \mathbf{u}_{<s>}^{(s_b)} \right) dS \right) \\ & - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\Omega^{(e)}$ は図-1に示す部分領域 $e$ を示しており、 $\Gamma_{<s>}$ は隣接する部分領域間の境界 $s$ 、 $\Gamma_{\sigma}$ は表面力が与えられる境界を示している。上付きの $(e)$ は、部分領域 $e$ に関する量であり、下付きの $<s>$ は、隣接部分領域境界辺 $s$ に関する量であることを示す。 $M$ は境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた部分領域 $\Omega^{(e)}$ の数、 $N$ は隣接要素の共通の境界 $\Gamma_{<ab>} := \partial\Omega^{(a)} \cap \partial\Omega^{(b)}$ の数であり、 $\delta \mathbf{u}$ は仮想変位、 $\boldsymbol{\sigma}$ は要素応力、 $\mathbf{f}$ は物体力、 $\boldsymbol{\lambda}_{<s>}$ は境界 $\Gamma_{<s>}$ におけるLagrangeの未定乗数、 $\hat{\mathbf{t}}$ は表面力である。

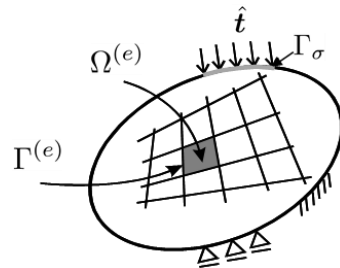


図-1 部分領域  $\Omega^{(e)}$  と部分領域間の境界  $\Gamma^{(e)}$

HPMは図-2に示すように、式(2)で表される要素代表点の変位と式(3)で表される要素内ひずみを自由度とし、これらにより要素内変位場を式(4)のように定義する

$$\mathbf{d}^{(e)} = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^t \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z]^t \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (4a)$$

ここに

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & Y & -X & 0 \end{bmatrix} \quad (4b)$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & \frac{1}{2}Y & 0 & \frac{1}{2}Z \\ 0 & Y & 0 & \frac{1}{2}X & \frac{1}{2}Z & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & \frac{1}{2}Y & \frac{1}{2}X \end{bmatrix} \quad (4c)$$

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0$$

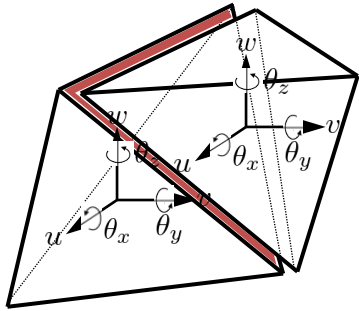


図-2 3次元HPMの自由度とペナルティ層（褐色部分）

本解析では四面体要素を用い、要素内は一樣ひずみとした。この要素内変位を用いて要素境界に設定された十分に剛なペナルティパネの相対変位を求め、要素境界力を決定する手法である。式(5)にペナルティパネの相対変位から要素境界力を求める式を示す。ここで、添え字  $s, t, n$  は図-3 に示す座標系の成分である。

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{s<s>} \\ \lambda_{t<s>} \\ \lambda_{n<s>} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{s<s>} \\ \delta_{t<s>} \\ \delta_{n<s>} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

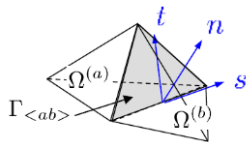


図-3 局所座標系 s-t-n

これらの関係から式(1)のハイブリッド型仮想仕事式を離散化形式に書き下し、仮想変位  $\delta \mathbf{u}$  が任意であることから最終的に離散化方程式が得られ、これを解いている。ここでは紙面の都合で離散化過程以下を略した。詳しくは文献[5][6]を参照されたい。

### 3. 弾性解析による変位の精度検証

ここでは作成した3次元四面体要素HPMプログラムの検証解析として要素分割を次第に細かくした場合の精度向上の傾向を検討する。解析対象はコンクリートの引張強度試験に用いられる3点曲げの梁（100×100×400mm）として、92要素の粗いメッシュ分割、4849要素の中位のメッシュ分割、39158要素の細かいメッシュ分割の3種類の解析を行った。表-1に解析に用いた材料定数を、図-4に解析対象と境界条件を示す。

表-1 材料定数

ヤング率 (MPa)	圧縮強度 $f_c$ (MPa)	引張強度 $f_t$ (MPa)	ポアソン比 $\nu$
$2.18 \times 10^4$	22.5	2.35	0.2

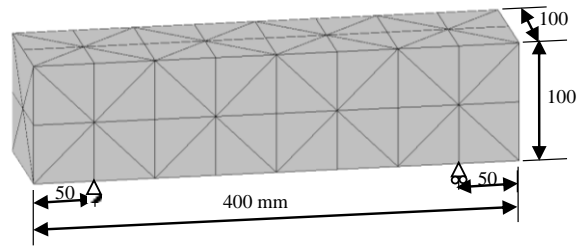


図-4 メッシュ図（レギュラーメッシュ92要素）

図-5に各要素分割の解析における変形状況を示す。荷重は梁中央上面の全節点の変位を制御して载荷している。また、図-6に荷重変形関係を汎用の有限要素法（以降FEMと称す）の解析結果と合わせて示す。解析の剛性（荷重変形関係の傾き）は細かいメッシュでようやく安定しており、各要素分割での解析値はFEMと一致している。

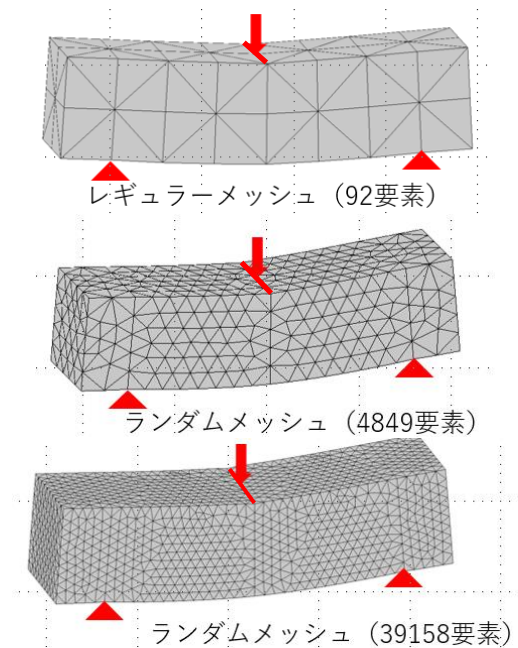


図-5 要素分割と変形状況

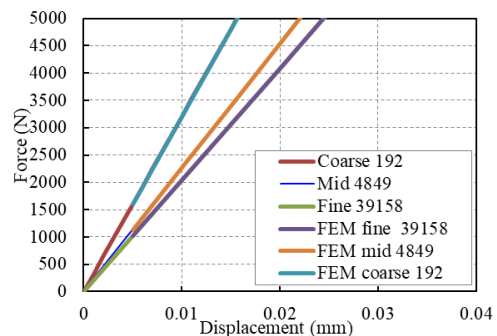


図-6 荷重変形関係（分割数と変位量）

#### 4. ひび割れ解析

ひび割れの判定は図-7(a)に示すように(図は2次元要素の場合であるが、本解析では四面体の1面に3点の評価点を設定して解析している)要素間のペナルティバネの応力値 $\sigma_n$ がひび割れ強度 $f_t$ を超えた場合にひび割れたと判断してバネを削除する。それ以降はひび割れ幅 $\delta_n$ と応力 $\sigma_n$ の関係を図-7(c)の曲線として表し、この曲線の下側の面積が破壊エネルギー $G_f$ となるように応力を解放する。曲線はHordijkの3次曲線[7]を用いる。

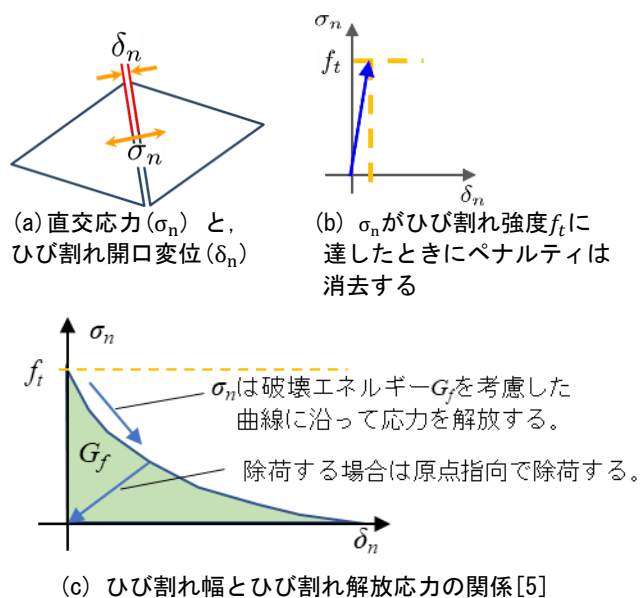


図-7 引張破壊エネルギーとひび割れ解放応力

解析対象は図-8の3点曲げ供試体の梁中央に下端から30mmまでノッチが入っている試験体とする。材料定数を表-2に示す。ランダムメッシュ(4826要素)におけるひび割れ解析の荷重変形関係を実験結果[5]と合わせて図-9に示す。実験結果よりやや最大荷重が大きい、ピーク前から順にひび割れが進展していく過程やひび割れ後の曲線の形状は試験結果と同じ傾向を示している。実験結果の $G_f$ を求める際のひび割れ開口変位(CMOD)の範囲が大きく、破壊エネルギー $G_f=0.2$ は大きめに求められているため、CMOD=1.5mmまでの $G_f=0.17$ を用いるなどで実験値と近づけることが可能であると考えられる。

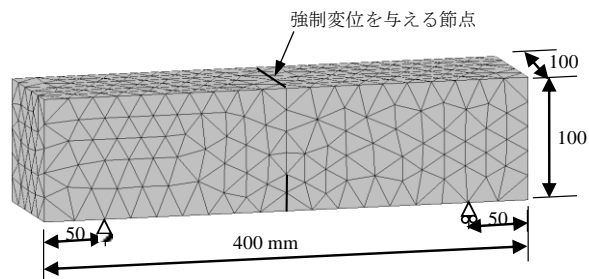


図-8 解析モデル図(ランダムメッシュ, 4826要素)

表-2 材料定数

ヤング率 (MPa)	圧縮強度 $f_c$ (MPa)	引張強度 $f_t$ (MPa)	ポアソン比 $\nu$	破壊エネルギー $G_f$ (N/mm)
$2.61 \times 10^4$	36.5	3.77	0.2	0.2

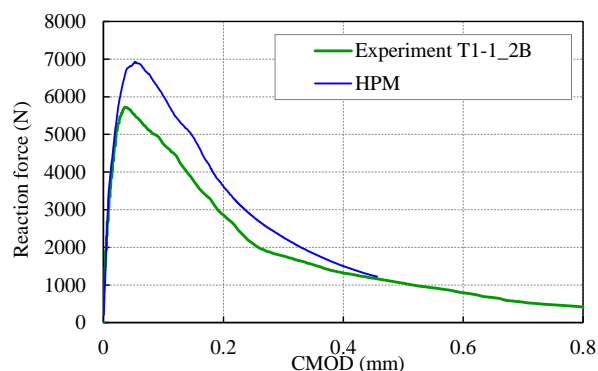


図-9 荷重ひびわれ開口変位関係の比較

図-10に解析結果の変形図を示す。弾性域でノッチ部分が開き、ひび割れが進展中に最大反力となり、次第にひび割れ幅が拡大していく。変形倍率は50倍としている。

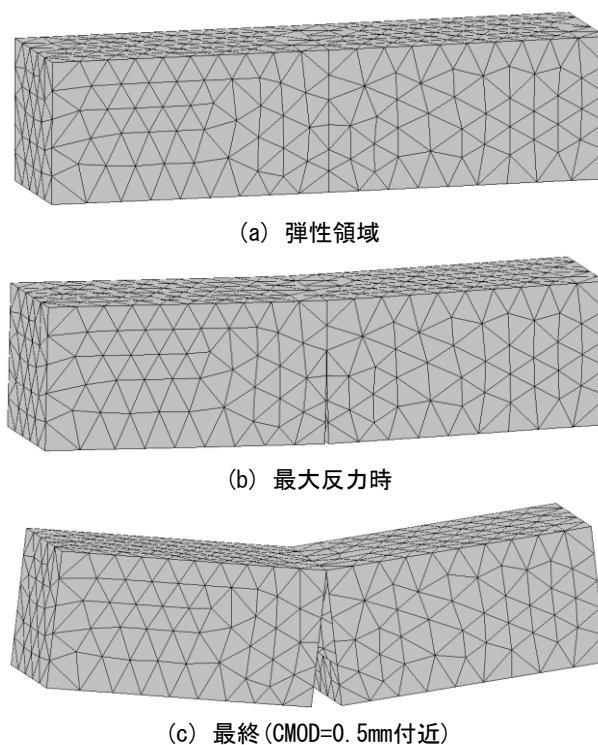


図-10 変形性状(4826要素)

#### 5. まとめ

既往の2次元HPM解析プログラムを拡張し、四面体要素を用いて3次元解析を可能にした。また、四面体要素間のペナルティ層にひび割れ破壊を定義し、ひび割れ後は破壊エネルギーを考慮して応力解放する機能を導入した。このプログラムを用いて弾性およびひび割れ非線形解析を行い以下の知見を得た。

- (1) 弾性解析において要素分割を変化させ、変形精度を確認した。変形精度は汎用の有限要素法の四面体要素を用いた場合と同じ変形となり、解析コードの検証ができた。
- (2) ひび割れ解析においては2次元で用いたペナルティでのひび割れと応力解放ロジックを3次元のペナルティ層でのひび割れと応力解放に適用できることを確認した。

#### 参考文献

- [1] 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp261-270, 2000.
- [2] 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集, 2001.
- [3] 竹内則雄, 上田真稔, 上林厚志, 鬼頭宏明ほか: 鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析法, 丸善, 2005.
- [4] 上林厚志, 藤原良博, 竹内則雄, 塩見忠彦: HPMによる無筋コンクリートのひび割れ進展解析, 計算工学講演会論文集, 2015.
- [5] 上林厚志: 引張破壊エネルギーを考慮したハイブリッド型ペナルティ法によるコンクリート構造の離散化解析法に関する研究, 法政大学学位論文, 令和4年3月.
- [6] 山村和人, Anna Vardanyan, 竹内則雄: ハイブリッド型ペナルティ法におけるピラミッド要素の開発法政大学情報メディア教育研究センター研究報告, Vol.35, 2020.
- [7] Cornelissen, H. A. W., Hordijk, D. A. and Reinhardt, H. W.: Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture toughness and Fracture Energy of Concrete, pp.565, pp.565--575, 1986.575, 1986