

理論式に基づく曲げ破壊型鉄筋コンクリートはりの 非線形計算モデル

Nonlinear Computational Model for Predicting Flexural Fracture Behavior of Reinforced Concrete Beam Based on Beam Theory

車谷 麻緒¹⁾

Mao Kurumatani

¹⁾ 博(工) 茨城大学大学院 理工学研究科 都市システム工学専攻

(〒316-8511 茨城県日立市中成沢町4-12-1, E-mail: mao.kurumatani.jp@vc.ibaraki.ac.jp)

A nonlinear computational model for predicting flexural fracture behavior of reinforced concrete beam based on Euler-Bernoulli beam theory. The bisection algorithm and Newton method are applied to solve the respective nonlinear problem for the neutral axis and equilibrium due to the material nonlinearity of concrete and steel. After formulating the four-point bend problem of reinforced concrete beams based on the Euler-Bernoulli beam theory, several numerical examples are presented to verify and validate the proposed nonlinear computational model.

Key Words : Beam theory, Reinforced concrete beam, Nonlinear problem, Verification and Validation

1. はじめに

近年、計算固体力学分野において、数値シミュレーションの品質と信頼性を保証するための取り組みが重要視されている。米国機械学会（ASME）では、V&V (Verification & Validation: 検証と妥当性確認) とよばれる数値シミュレーションの品質と信頼性を保証するための概念や方法が ASME V&V 10 としてまとめられている[1]。

コンクリート構造物のV&Vにおけるボトルネックは、非線形性の強いコンクリートの力学特性にある。数値解析によりコンクリートの力学挙動を再現するのは簡単ではなく、また実験結果のばらつきも大きいため、コンクリート構造物のV&Vに関する既往の研究としては「妥当性確認」に焦点を当てた事例が多い[2]。

一方、妥当性確認の前に実施されなければならない「検証」については、具体的な手順や方法が存在しないか、または確立されていないため、これまでにコンクリートを対象とした目立った研究は行われていない。その主な原因是、非線形性の強いコンクリート構造物において、数値誤差のない理論解や解析解のような参照解が存在しないことがある。

そこで本研究では、曲げ破壊型のRCはりを対象に、オイラー・ベルヌーイのはり理論に基づく非線形計算モデルを提案する。提案モデルの特徴は、有限要素法などの離散化解析を用いずに、はり理論から導出される支配方程式を解析的に解くことで、理論解（解析解）に限りなく近いRCはりの非線形力学挙動を再現できることである。提案モデルの定式化を示したのち、既存の実験結果と比較することにより、提案モデルの妥当性を示す。

2. 提案モデル

オイラー・ベルヌーイのはり理論に基づく定式化を行うため、スターラップ（せん断補強筋）が十分に配筋された曲げ破壊型のRCはりを対象とする。具体的には、図-1に示すように、RCはりの4点曲げ問題を対象とする。提案モデルの定式化の詳細は、文献[3]に示されているため、以下では概要のみを示すこととする。

支点Aから部材軸方向にx離れた位置での断面に生じる曲げモーメントをM(x), 分布荷重をpとすると、はりの平衡方程式（強形式）は次式で表される。

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + p = 0 \quad (1)$$

断面の中立軸からの距離をy, 断面積をAとすると、位置(x,y)における部材軸方向の応力σ(x,y)と中立軸からの距離yを用いて、曲げモーメントM(x)は次式で表される。

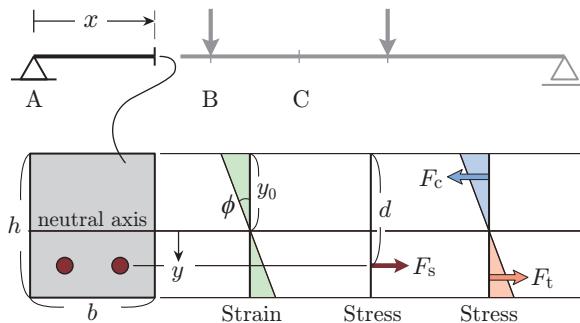
$$M(x) = \int_A \sigma(x,y)y dA \quad (2)$$

位置(x,y)でのひずみをε(x,y), 各材料の構成則関数を̂σ(ε)とすると、応力-ひずみ関係式は次のように表される。

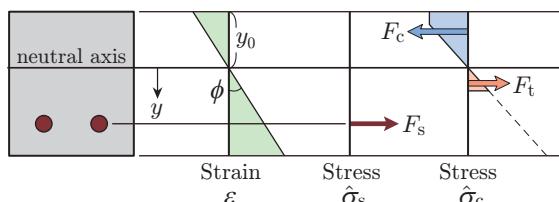
$$\sigma(x,y) = \hat{\sigma}(\varepsilon) \quad (3)$$

平面保持の仮定（オイラー・ベルヌーイの仮定）を適用すると、応力とひずみは部材軸方向の成分のみ値をもち、その他の成分はゼロとなる。位置xにおける曲率φ(x)を用いて、部材軸方向のひずみε(x,y)は次式で表される。

$$\varepsilon(x,y) = \phi(x)y \quad (4)$$



(a) Distribution of strain and stress in linear state



(b) Distribution of strain and stress in nonlinear state

図-1 鉄筋コンクリートはりの4点曲げ問題

本研究では、図-2に示すように、鉄筋の構成モデルには2直線モデル、コンクリートには圧縮側を2直線モデル、引張側を脆性破壊モデルとする構成モデルをそれぞれ適用する。

式(1)はRCはりの位置 x に関する平衡方程式、式(2)～(4)は位置 x におけるRCはりの断面(以下、RC断面)内で成り立つ関係式である。荷重・支持条件のもと、これらの4式を連立させて解けば、RCはりの支配方程式を満足する曲げモーメント・曲率・応力・ひずみを求めることができる。

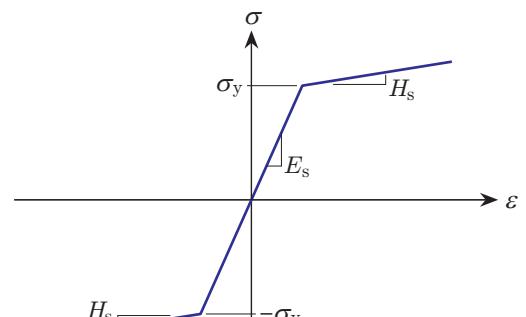
鉄筋とコンクリートの応力-ひずみ関係が非線形である場合、RC断面における中立軸の位置は曲率に依存して変化するため、曲率が $\phi(x)$ であるときの中立軸位置を求める非線形問題を解く必要がある。中立軸は断面内において必ず1つ存在するため、本研究では中立軸位置を求める非線形問題に対する解法として、二分法を用いることとする。

一方、RC断面の応力分布を積分して求められる曲げモーメントは、はりの平衡方程式(1)を満足するとは限らないため、単純はりの非線形問題を同時に解く必要がある。本研究では、曲げモーメントが一定とならないAB区間を n 分割し、割線剛性を用いる修正ニュートン法を適用することにより、式(1)を満足する曲率分布を求ることとする。また、たわみの理論解を再現できる方法として、仮想仕事の原理に基づく単位荷重法を適用し、RCはりのたわみを求ることとする。

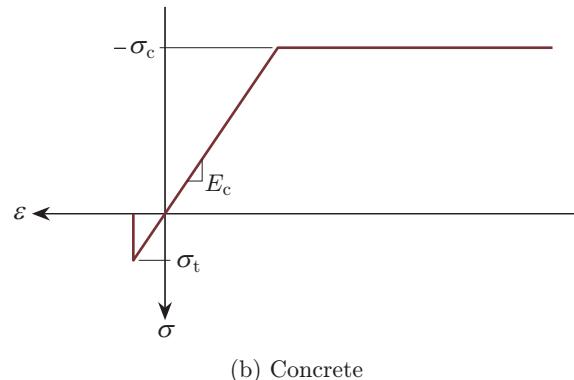
3. 提案モデルの妥当性確認

著者らが既往の研究において実施したRCはりの4点曲げ実験[4]を対象とする。RCはりの寸法と境界条件を図-3に示す。

実験概要が記載された文献[4]において、鉄筋の応力-ひずみ曲線のばらつきはほとんど見られない。鉄



(a) Steel



(b) Concrete

図-2 材料モデル

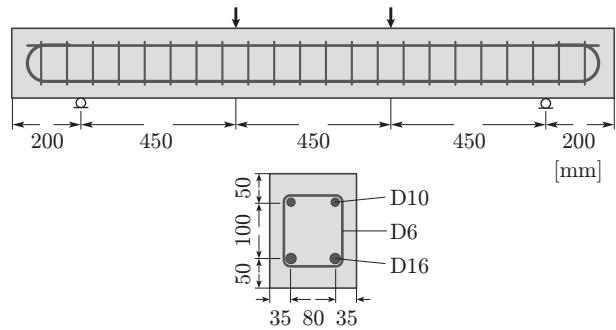


図-3 鉄筋コンクリートはりの4点曲げ実験

筋の材料挙動のばらつきは小さいと判断されるため、鉄筋の材料パラメータを次に示す固定値とする。

$$E_s = 200 \text{ GPa} ; H_s = 2 \text{ GPa} ; \sigma_s = 400 \text{ MPa}$$

一方、コンクリートの圧縮試験において、弾性係数は30～40 GPa、圧縮強度は40～50 MPaのばらつきが見られる。本研究では、これらのばらつきを考慮し、コンクリートの材料特性として、表-1に示す5ケースを設定することとする。ここで、Case 1～4は弾性係数と圧縮強度のそれぞれの最小値と最大値を割り振ったケース、Case 0は弾性係数と圧縮強度をそれぞれ平均値としたケースである。各ケースにおいて、コンクリート

表-1 コンクリートの材料パラメータ

	E_c (GPa)	σ_c (MPa)
Case 0	35	45
Case 1	30	40
Case 2	30	50
Case 3	40	40
Case 4	40	50

の引張強度は圧縮強度の 1/10 とする。

実験と提案モデルの荷重 - 変位関係を比較したグラフを図-4 に示す。提案モデルでは、コンクリートの引張挙動を脆性破壊としてモデル化しているため、コンクリートのひび割れ発生時に、実験よりも過度な荷重低下が再現されているが、それ以外の応答は実験とよく一致している。

提案モデルによる非線形解析に必要な入力値は、RC はりの寸法、および鉄筋とコンクリートのそれぞれ 3 つの材料パラメータである。鉄筋の弾性係数は 200 GPa 程度で規格化されており、硬化係数はその 1/100 程度として、またコンクリートの引張強度を圧縮強度の 1/10 程度とすれば、実質的に必要となるパラメータは、鉄筋の降伏応力、コンクリートの弾性係数と圧縮強度の 3 つとなる。たった 3 つの材料パラメータを決めるだけで、RC はりの実験結果を高い正確度で、かつ簡単に再現することができる。

4. おわりに

本研究では、コンクリート構造物の数値解析に対する V&V に向けて、曲げ破壊型の RC はりを対象に、オイラー・ベルヌーイのはり理論に基づく非線形計算モデルを提案した。提案モデルでは、RC はりの材料非線形問題において、有限要素法などの離散化解析を用いずに、微分方程式や理論式を満足する解を陰的に求め

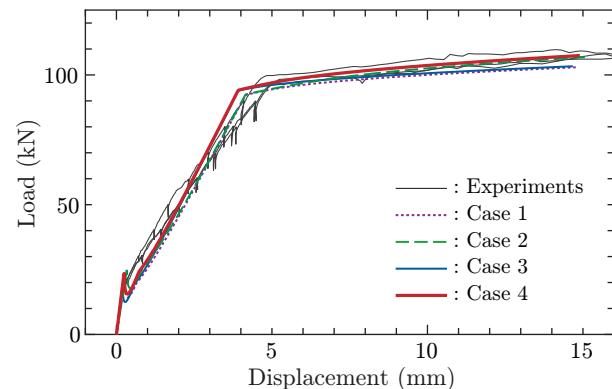


図-4 実験と提案モデルにおける荷重 - 変位関係の比較

る方法となっている。数値誤差をほぼゼロとみなせることから、提案モデルは理論解に限りなく近い RC はりの非線形力学挙動を、計算時間 1 秒程度で簡単に得ることのできる方法である。

参考文献

- [1] Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics: ASME V&V 10-2006, *The American Society for Mechanical Engineers*, 2006.
- [2] 上田尚史, 岡崎慎一郎, 車谷麻緒: シミュレーションの検証と妥当性確認 (V&V) に関する研究事例, コンクリート工学, Vol.58, No.11, 2020.
- [3] 車谷麻緒, 坂敏秀, 山本佳士, 上田尚史, 岡崎慎一郎, 小倉大季: 理論式に基づく鉄筋コンクリートはりの非線形計算モデルの開発とその検証および妥当性確認, 日本計算工学会論文集, No. 20210020, 2021.
- [4] 車谷麻緒, 岡崎慎一郎, 山本佳士, 上田尚史, 小倉大季: 不確かさの定量化に向けた RC はりの一斉載荷実験, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.75, No.2, pp.I-411-I-420, 2019.