

# Extended B-spline 基底関数を用いた陰的 MPM による 拡散亀裂から離散亀裂への遷移表現手法の開発

A Transition Scheme from Diffusive to Discrete Crack by means of the Extended B-spline Basis Functions in the Implicit Material Point Method

菅井理一<sup>1)</sup> 韓霽珂<sup>2)</sup> 森口周二<sup>3)</sup> 寺田賢二郎<sup>3)</sup>  
Riichi Sugai, Jike Han, Shuji Moriguchi and Kenjiro Terada

<sup>1)</sup>東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: riichi.sugai.r8@alumni.tohoku.ac.jp)

<sup>2)</sup>東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)

<sup>3)</sup>東北大学災害科学国際研究所 (〒 980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)

We propose a novel transition scheme from diffusive to discrete crack in the extended B-spline-based implicit material point method (EBS-MPM). The crack phase-field model is incorporated with the Nitsche's method, which plays a vital role to impose an arbitrary Dirichlet boundary condition in the EBS-MPM. Also, to stably calculate crack propagation in the region subjected to extremely large deformation, we originally develop a domain separation scheme by means of the extended B-spline (EBS) basis functions. A diffusive crack surface is detected based on the damage gradient, and the transition to discrete crack is achieved by using the EBS basis functions. Thanks to the EBS basis functions, we can track the motions of separated bodies without additional displacement fields. Two numerical examples are presented to demonstrate the performance of the proposed method.

**Key Words :** Crack phase-field, Transition to discrete crack, Extended B-spline, Implicit material point method

## 1. 研究背景

Griffith 破壊に端を発し、破壊現象に対して数多くの実験や数値モデルの提案が実施されてきた。また、破壊挙動の予測や現象理解のために数値解析手法に関する研究も数多く行われてきたが、離散亀裂を直接的に近似する手法と、連続体損傷モデルを適用した手法に大別される。本研究では、連続体損傷モデルの一種である phase-field (PF) 亀裂モデル [1] に注目する。PF 亀裂モデルは Griffith 理論に基づいて脆性的な材料の亀裂進展をポテンシャルエネルギーの最小化問題の解として導いたものであり、離散亀裂を PF 近似して空間的に連続分布する拡散亀裂として表現する。これにより破壊力学理論の枠組みで、離散亀裂モデルでは困難であった任意位置での亀裂発生や任意方向への亀裂進展が追跡可能となった。その後、Miehe ら [2] は連続体力学の枠組みで熱力学的に整合する PF 亀裂モデルを定式化し、安定した亀裂進展解析を実現するための手法を提案した。PF 亀裂モデルはそれ以降、動的解析や延性破壊モデルへと拡張されている。また PF 亀裂モデルは、大変形解析への多くの適用実績がある material point method (MPM) の枠組みにも導入されており、準静的・動的な脆性破壊・延性破壊への適用が報告されている。

MPM の利点として、亀裂進展により損傷領域が局所的に大きく変形する場合においても計算格子の破綻が問題にならないことが挙げられる。また、MPM では物理領域のすべての物理量を粒子が保持し、背面格子は物体の変形計算にのみ使用されて物体の運動を追従することがないため、粒子が含まれない背面格子が複数

連続するような領域において自然と不連続な領域への遷移が表現される。その一方で、粒子は積分点に相当するため、粒子の空間分布が疎になる損傷領域における積分精度が著しく低下することや、全体剛性行列の悪条件化が懸念される。関連して連続体損傷モデルにより表現された亀裂面を不連続面として評価する手法として、Homel and Herbold [3] は損傷勾配を利用した物体分割手法を提案した。この手法では、亀裂面に対して直交する損傷勾配を用いて亀裂面の中央を特定して物体を分割し、それぞれの領域に対して新たな変位場を定義することで亀裂面における物体の不連続な変形を表現した。しかしながら、損傷勾配を利用した分割手法は曲線状の亀裂や 3 次元的な複雑な形状の亀裂に対しても適用できる一方で、分割した物理領域に対して追加で変位場を定義する必要があるため、全体剛性行列を解く陰的 MPM への直接的な適用は困難である。

そこで本研究では、extended B-spline (EBS) 基底関数を導入することで新たな変位場の定義が不要な物体分割手法を適用した陰的 MPM を提案する。EBS 基底関数は MPM において陰的時間積分を安定して適用するために Yamaguchi ら [4] により導入されたものであり、物理境界付近において基底関数のサポート領域内に含まれる物理領域が少なくなることで引き起こされる全体剛性行列の悪条件化を回避することが可能となる。本研究では、亀裂面を離散的な不連続面として表現する際にこれを適用する。具体的には、PF 亀裂モデルを用いて得られる損傷場の空間勾配を利用して亀裂中央を特定し、損傷勾配の向きが一致する粒子と制御点同士

でマッピングするように EBS 基底関数を構築することで物体を分割する。EBS 基底関数を用いることで一つの制御点には分割された物理領域の一方のみから物理量がマッピングされるため、一つの制御点に複数の変位場を定義する必要がなく、解析を通して同一の自由度での求解が可能となる。また、分割された物理領域が十分に離れた場合には、自然と不連続な物理領域への遷移が表現されることになる。提案手法の表現性を検証するために、簡単なベンチマーク問題と大変化下での亀裂発生・進展解析を実施する。

## 2. Phase-field 亀裂モデル

### (1) 亀裂の phase-field 近似

PF 亀裂モデルでは、離散亀裂を phase-field (PF) 変数  $d \in (0, 1]$  を用いて拡散亀裂として近似する。 $d \rightarrow 0$  で損傷を受けていない状態を、 $d = 1$  は完全に損傷している状態を表す。PF 変数は亀裂中心を  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  として、指数関数により  $d = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|/l_f)$  と表現される。ここで  $l_f$  は長さパラメータであり、拡散亀裂の幅を制御する。拡散亀裂は指数関数形で表されるため、以下に示す亀裂密度関数が導かれる。

$$\gamma_f = \frac{d^2 + l_f^2 \|\nabla_X d\|^2}{2l_f} \quad (1)$$

ここで、 $\nabla_X$  は基準配置における空間勾配演算子である。この亀裂密度関数を用いると拡散亀裂面  $\Gamma_{l_f}$  は離散亀裂面  $\Gamma_f$  に収束する。

### (2) 全ポテンシャルエネルギー

準静的問題に対する全ポテンシャルエネルギー  $\mathcal{W}$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{W}_{\text{int}} + \mathcal{W}_{\text{pen}} + \mathcal{W}_{\text{Nit}} + \mathcal{W}_f \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} \Psi^e dV + \int_{\Gamma_0^u} \frac{\beta}{2} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2 dA \\ &\quad - \int_{\Gamma_0^u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{P} \mathbf{N} dA + \int_{\mathcal{B}_0} G_c \gamma_f dV \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\mathcal{W}_{\text{int}}$ 、 $\mathcal{W}_{\text{pen}}$ 、 $\mathcal{W}_{\text{Nit}}$ 、 $\mathcal{W}_f$  はそれぞれ弾性ひずみエネルギー、強制変位を与えるためのペナルティ項と Nitsche 項、拡散亀裂を生成するのに要する仕事である。また、 $\mathcal{B}_0$ 、 $\Gamma_0^u$ 、 $\Psi^e$ 、 $\beta$ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $G_c$  はそれぞれ現在配置における物理領域、現在配置における基本境界、損傷による弾性剛性の低減を考慮した弾性ひずみエネルギー関数、ペナルティ係数、変位、強制変位、第一 Piola-Kirchhoff 応力、基準配置における外向き単位法線ベクトル、単位面積当たりの破壊エネルギーである。 $\Psi^e$  は損傷を受けていない材料の弾性ひずみエネルギー関数  $\Psi_0^e$  を用いて次式で定義される。

$$\Psi^e = \begin{cases} g(d) \left( \underbrace{\Psi_{0,\text{dev}}^e + \Psi_{0,\text{vol}}^e}_{\Psi_0^{e+}} \right) + \underbrace{0}_{\Psi_0^{e-}} & \text{for } \mathcal{J} \geq 1 \\ g(d) \left( \underbrace{\Psi_{0,\text{dev}}^e}_{\Psi_0^{e+}} \right) + \underbrace{\Psi_{0,\text{vol}}^e}_{\Psi_0^{e-}} & \text{for } \mathcal{J} < 1 \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\Psi_{0,\text{vol}}^e$  と  $\Psi_{0,\text{dev}}^e$  はそれぞれ弾性ひずみエネルギーの体積変形成分とせん断変形成分であり、 $\Psi_0^{e+}$  と  $\Psi_0^{e-}$  は損傷に寄与する成分と寄与しない成分である。また、 $g(d)$  は材料の弾性剛性を低減するための単調減少関数であり、本研究では  $g(d) = \min\{(1-d)^2, k\}$  とし、 $k = 1.0 \times 10^{-4}$  と設定する。 $\mathcal{J}$  は体積ヤコビアンであり、基準配置の位置ベクトル  $\mathbf{X}$  と現在配置の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  により  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$  と定義される変形勾配ベクトルを用いて  $\mathcal{J} \equiv \det \mathbf{F}$  で表される。弾性ひずみエネルギー関数  $\Psi^e$  を用いて、第一 Piola-Kirchhoff 応力  $\mathbf{P}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbf{F}} = g(d) \frac{\partial \Psi^{e+}}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial \Psi^{e-}}{\partial \mathbf{F}} =: g(d) \mathbf{P}^+ + \mathbf{P}^- \quad (4)$$

損傷を受けていない材料の弾性ひずみエネルギー関数  $\Psi_0^e$  は以下で定義する。

$$\begin{aligned} \Psi_0^e &= \Psi_{0,\text{vol}}^e + \Psi_{0,\text{dev}}^e \\ &= \frac{1}{2} K \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{J}^2 - 1) - \ln \mathcal{J} \right] + \frac{1}{2} G (\text{tr } \bar{\mathbf{b}} - 3) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{b}} = \mathcal{J}^{-2/3} \mathbf{b}$  は左 Cauchy-Green テンソル  $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  の等容変形成分であり、 $K$  と  $G$  はそれぞれ体積弾性係数とせん断剛性係数である。

### (3) 弱形式

変位場と PF の弱形式はそれぞれ式 (2) の全ポテンシャルエネルギーの仮想変位  $\delta \mathbf{u}$  と仮想 PF 変数  $\delta d$  に関する最小化問題を解くことで導出される。現在配置における変位場の弱形式は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_u \mathcal{W} &= \delta_u \mathcal{W}_{\text{int}} + \delta_u \mathcal{W}_{\text{pen}} + \delta_u \mathcal{W}_{\text{Nit}} \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} dV + \int_{\Gamma_t^u} \beta (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \frac{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{n}}}{\mathcal{J}} dA \\ &\quad - \int_{\Gamma_t^u} \left( \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \left( \mathbf{a} : \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{n} \right) dA = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\delta_u \mathcal{W}$  は全ポテンシャルエネルギーの  $\delta \mathbf{u}$  方向の変分であり、 $\mathcal{B}_t$ 、 $\Gamma_t^u$  はそれぞれ現在配置における物理領域と基本境界、 $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\mathbf{n}$  は Cauchy 応力テンソルと現在配置における外向き単位法線ベクトルである。また、 $\mathbf{a}$  は現在配置を参照する第一種弾性テンソルである。

一方、現在配置における PF の弱形式は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_d \mathcal{W} &= \delta_d \mathcal{W}_{\text{int}} + \delta_d \mathcal{W}_{\text{Nit}} + \delta_d \mathcal{W}_f \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \frac{\partial g}{\partial d} \delta d \mathcal{H} \mathcal{J}^{-1} dV - \int_{\Gamma_t^u} \frac{\partial g}{\partial d} \delta d ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{n}) dA \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}_t} G_c \left( \frac{d}{l_f} \delta d + l_f \left( \frac{\partial \delta d}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} \right) \cdot \left( \frac{\partial d}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} \right) \right) \mathcal{J}^{-1} dV = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\delta_d \mathcal{W}$  は全ポテンシャルエネルギーの  $\delta d$  方向の変分であり、 $\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathcal{J}^{-1} \mathbf{P}^+ \mathbf{F}^T$  は Cauchy 応力テンソルの損傷に寄与する成分である。また、 $\mathcal{H}$  は損傷発展の不可逆性を担保するために導入した履歴変数であり、時刻  $t$  において位置  $\mathbf{x}$  での値を以下のように定義する。

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) \equiv \max_{s \in [0, t]} \Psi_0^{e+}(\mathbf{x}, s) \quad (8)$$

本研究では式 (6) と (7) を Newton-Raphson (NR) 法による増分法を適用して各独立変数  $\{\mathbf{u}, d\}$  に関して陰的に解くが、安定した損傷計算を行うために staggered algorithm [5] を採用する。このため、変位場に対しては変位増分  $\Delta \mathbf{u}$  に関する次の線形化方程式が必要になる。

$$\delta_u \mathcal{W}(\mathbf{u}, d; \delta \mathbf{u}, \delta d) + D \delta_u \mathcal{W}(\mathbf{u}, d; \delta \mathbf{u}, \delta d) [\Delta \mathbf{u}] = 0 \quad (9)$$

また、PF の弱形式を増分法を用いて解くために PF 変数増分  $\Delta d$  に関する次の線形化方程式が必要になる。

$$\delta_d \mathcal{W}(\mathbf{u}, d; \delta \mathbf{u}, \delta d) + D \delta_d \mathcal{W}(\mathbf{u}, d; \delta \mathbf{u}, \delta d) [\Delta d] = 0 \quad (10)$$

### 3. EBS 基底関数に基づく MPM

#### (1) MPM による離散化

MPM では物理領域を一定体積を持つ質量要素に分割し、体積  $v_p$  を割り当てる粒子を配置する。また、物理境界も同様に要素分割した上で表面積  $a_p$  を割り当てた粒子を配置する。物理領域における被積分関数の体積分および面積積分は、領域内の粒子位置で粒子に割り当てられた体積及び表面積との線形和で近似される。

#### (2) B-spline 基底関数

1 次元の B-spline 基底関数は、パラメータ空間の座標  $\xi$  と次数  $\mu$  を用いて次の漸化式で定義される。

$$N_I^\mu(\xi) \equiv \frac{\xi - \xi_I}{\xi_{I+\mu} - \xi_I} N_I^{\mu-1}(\xi) + \frac{\xi_{I+\mu+1} - \xi}{\xi_{I+\mu+1} - \xi_{I+1}} N_{I+1}^{\mu-1}(\xi) \quad (11)$$

ここで、 $\xi_I$  はノット値で添字  $I$  はノット指標と呼ばれ、 $n$  個の基底関数の定義域はノット値を並べたノットベクトル  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+\mu+1}\}$  により規定され、0 次 B-spline は対応するノット区間で 1、それ以外で 0 をとる。

また、 $n_{\text{dim}}$  次元問題における B-spline 基底関数は、上記の 1 次元問題における基底関数のテンソル積を用いて

$$B_I^\mu(\xi) = \prod_{\alpha=1}^{n_{\text{dim}}} N_{I^\alpha}^\mu(\xi^\alpha) \quad (12)$$

のように表される。ここで、 $\xi^\alpha$  は  $\alpha$  方向のパラメータ座標である。また、 $I^\alpha$  は  $\alpha$  方向のノット指標であり、 $\alpha$  方向の B-spline 基底関数の制御点番号を表し、添字  $I$  は制御点  $(I^1, \dots, I^{n_{\text{dim}}})$  を表す。

基底関数  $B_I^\mu$  を用いて粒子位置における変位  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p)$  と PF 変数  $d(\mathbf{x}_p)$  を次式により近似する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_p) = \sum_I \mathbf{u}^I B_I^\mu(\mathbf{x}_p) \quad (13)$$

$$d(\mathbf{x}_p) \approx d^h(\mathbf{x}_p) = \sum_I d^I B_I^\mu(\mathbf{x}_p) \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{u}^I$  と  $d^I$  は制御点  $I$  における変位と PF 変数の値である。

#### (3) Extended B-spline 基底関数

補間近似に用いる基底関数のうちサポート領域を占める物体領域が少ない基底関数がある場合には、それに関する制御点を補間近似から除外するとともに、隣

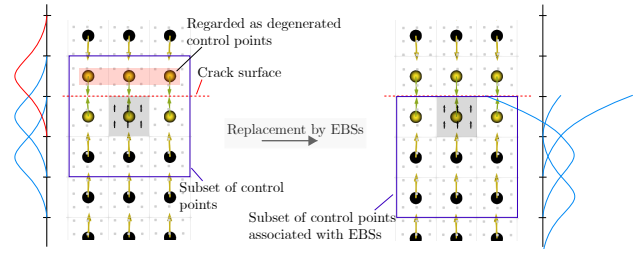


図-1: EBS 基底関数を利用した物体分割手法の概念図

接する制御点によりその制御点位置における値を外挿し、関連するすべての基底関数を修正（拡張）する。これにより、近似精度を大きく低下させることなく剛性行列の悪条件化を回避できる。

B-spline 基底関数のサポート領域を占める物理領域の体積分率とその体積分率に閾値  $\phi_{\text{cr}}$  を設けて、その大小関係に応じて B-spline 基底関数を i) 標準基底関数 ( $\phi_I > \phi_{\text{cr}}$ )、ii) 欠陥基底関数 ( $0 < \phi_I \leq \phi_{\text{cr}}$ )、iii) 外部基底関数 ( $\phi_I = 0$ ) の 3 種類に分類する。いま、i) と ii) の制御点の集合をそれぞれ  $\mathbb{S}$ 、 $\mathbb{D}$  と表すと、変位場の補間近似式 (13) は次式のように改められる。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathbb{S}} B_I^\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}^I + \sum_{J \in \mathbb{D}} B_J^\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}^J \quad (15)$$

そして、欠陥基底関数に関する制御点の値  $\mathbf{u}^J$  を標準基底関数に関する制御点の値  $\mathbf{u}^I$  を用いて次の線形結合により外挿する。

$$\mathbf{u}^J \equiv \sum_{I \in \mathbb{S}_J} E_{IJ} \mathbf{u}^I \quad (16)$$

ここで、係数  $E_{IJ}$  は制御点  $I$  における  $\mu$  次の Lagrange 補間多項式の制御点  $J$  での値である。また集合  $\mathbb{S}_J$  は  $\mathbb{S}_J = \{(K^1, \dots, K^{n_{\text{dim}}})\} + [0, \dots, \mu]^{n_{\text{dim}}} \in \mathbb{S}$  であり、制御点  $K$  を始点として制御点  $J$  に隣接する標準基底関数の制御点の集合である。制御点  $I$  での値  $\mathbf{u}^I$  による  $\mathbf{u}^J$  の外挿式 (16) を用いて式 (15) を書き改めると次式のようにになる。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathbb{S}} \left( B_I^\mu(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{J \in \mathbb{D}_I} B_J^\mu(\mathbf{x}) E_{IJ}}_{B_I^{\mu,e}(\mathbf{x})} \right) \mathbf{u}^I \quad (17)$$

ここで、 $\mathbb{D}_I = \{J \in \mathbb{D} : I \in \mathbb{S}_J\}$  は標準基底関数の制御点  $I$  に関連する欠陥基底関数の制御点  $J$  の集合である。また、式 (17) の下付き括弧の項を  $B_I^{\mu,e}(\mathbf{x})$  と表記し、extended B-spline（以下、EBS）と称する。変位の近似式と同様に、PF 変数の近似式 (14) も EBS 基底関数を用いて次式により近似される。

$$d^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathbb{S}} B_I^{\mu,e}(\mathbf{x}) d^I \quad (18)$$

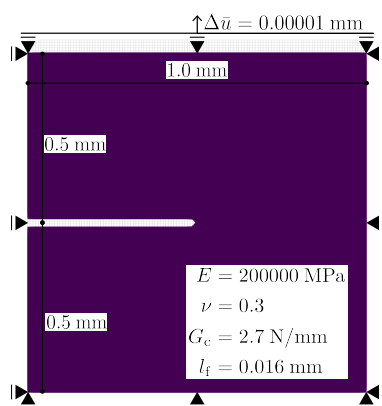


図-2: 単一切欠き付試験片のモデル形状および解析条件

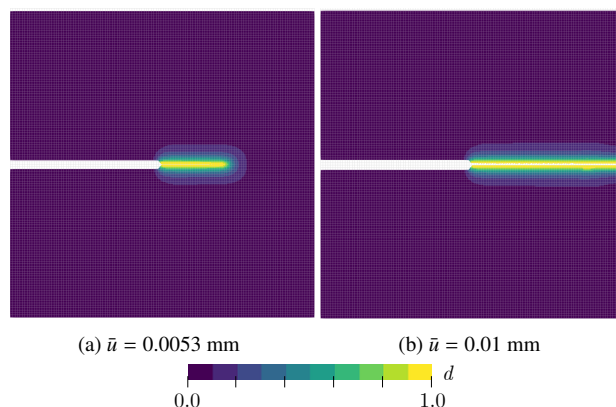


図-4: 損傷発展と変形図

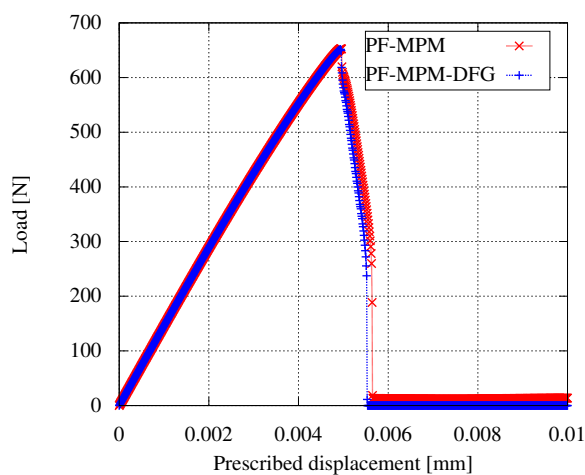


図-3: 単一切欠き付試験片の引張試験での荷重変位関係

#### (4) EBS 基底関数による離散亀裂表現手法

損傷勾配は亀裂面に直交するように分布すると考えられるため、図-1 に示すように隣接する2つの制御点で得られる損傷勾配のなす角が鈍角になる場合に、それらの制御点の間に亀裂面が存在すると考えられる。図-1 左図の灰色で示す要素は亀裂の下側にあり、この要素内の粒子は上向きの損傷勾配  $\nabla d_p$  を持つ。この灰色の要素の物理量の補間近似には紫色で囲った範囲の9つの制御点を使用されるが、このうち上3つの制御点をもつ損傷勾配  $\nabla d^j$  は粒子が持つ損傷勾配との間に  $\nabla d^j \cdot \nabla d_p < 0$  の関係が成り立つため、この制御点は亀裂面に対して灰色の要素と逆側の物理領域をサポートする基底関数に関するものとして判定する。そして、亀裂面に対して灰色要素と逆側の制御点の値を、同じ側にある制御点を用いて外挿するように構築されたEBS基底関数と、図-1 右図の紫色で囲った範囲にある制御点を用いて灰色要素の補間近似を行う。なお、物体を分割するか否かの判定は制御点におけるPF変数が閾値  $d_{cr}$  を上回ったときに行うこととなる。

#### 4. 数値解析例

本章ではPF亀裂モデルを導入したEBS基底関数に基づく陰的MPMの亀裂進展解析への適用性および離散亀裂への遷移手法の表現性能を検証する。これ以降、

物体分割手法を適用しない結果を“PF-MPM”と、分割手法を適用した結果を“PF-MPM-DFG”と称する。すべての解析で奥行方向を一格子とし、奥行方向の変位を拘束した準3次元解析を実施する。また、2次のEBS基底関数を採用する。

##### (1) 単一切欠き付試験片の引張問題

提案手法の亀裂進展解析への適用性と離散亀裂への遷移表現性を検証するため、単一切欠き付試験片の引張問題を実施する。モデル形状と境界条件、強制変位増分、材料定数は図-2に示す。背面格子の一边の長さを0.008 mmとし、初期配置において一格子内の粒子数は9個とする。 $d_{cr}$  と  $\phi_{cr}$ 、 $\beta$  はそれぞれ0.9と0.1、 $2.0 \times 10^8$ とする。

図-3に荷重変位曲線を示す。“PF-MPM”と“PF-MPM-DFG”の双方で、変位が  $\bar{u} = 0.00494$  mmで荷重のピークを迎え、これ以降顕著な剛性低下がみられ、既往研究[6]と類似した曲線を得たことが確認できる。“PF-MPM-DFG”では変位が  $\bar{u} = 0.00553$  mmのときに荷重が0となるが、これは“PF-MPM-DFG”ではEBS基底関数により離散亀裂が適切に表現されて物体が切り離されたためである。一方で、“PF-MPM”では0ではないごく小さい荷重値を取ることが分かるが、これは拡散亀裂として近似した領域において変位場が連続であることと剛性低減関数  $g(d)$  の下限値を  $k = 1.0 \times 10^{-4}$  としたこと起因する。

図-4に“PF-MPM-DFG”の損傷発展の様子と変形図を示す。図-4(b)では分割された物体が鉛直上向きに並進運動をして、離散亀裂の領域の幅が拡張している様子が確認できる。以上よりPF亀裂モデルを導入したEBS基底関数に基づく陰的MPMにより典型的な引張破壊を再現できることを確認した。また、EBS基底関数を用いた物体分割手法を適用する事により、単純な破壊モードで適切に物体の分割が表現できることを例示した。

##### (2) L型構造物の曲げ破壊問題

大変形下における物体分割手法の適用性を検証するために、L型構造物の曲げ破壊問題を扱う。図-5にモデル形状と境界条件、材料定数を示す。構造物の右上部

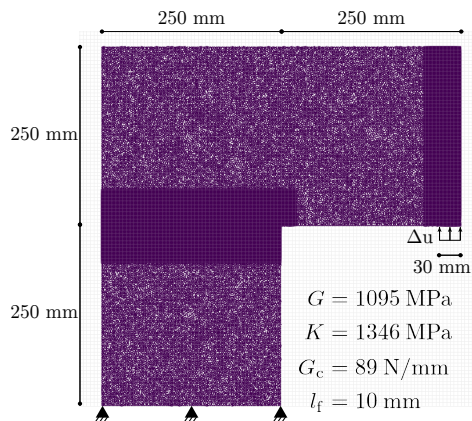


図-5: L型構造物のモデル形状および解析条件

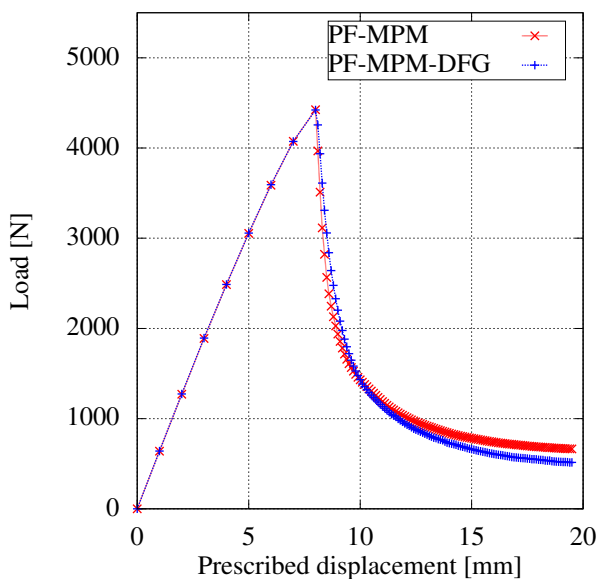


図-6: L型構造物の曲げ破壊問題での荷重変位関係

30 mm にわたって水平方向に拘束しながら、鉛直方向に強制変位増分  $\Delta \bar{u} = 1$  mm で強制変位量が  $\bar{u} = 8$  mm となるまで与え、その後は  $\Delta \bar{u} = 0.1$  mm で与える。背面格子の一边の長さを 5 mm とする。初期配置において、粒子の数密度が密な領域には一格子あたり約 170 粒子を、疎な領域には一格子あたり約 36 粒子配置する。 $\phi_{cr}$  と  $d_{cr}$ 、ペナルティ係数はそれぞれ 0.001 と 0.85,  $2.0 \times 10^7$  とする。

図-6 に荷重変位曲線を示す。強制変位  $\bar{u} = 8.0$  mm で荷重のピークを迎えた後、それ以降で剛性低下がみられる。強制変位  $\bar{u} = 10.0$  mm までは物体分割手法を適用しない“PF-MPM”の方が物体分割手法を適用した“PF-MPM-DFG”に比べて同強制変位量に対する荷重値がやや小さいが、 $\bar{u} = 10.0$  mm 以降は“PF-MPM-DFG”の方が荷重値が小さくなる。図-7 には“PF-MPM”と“PF-MPM-DFG”の損傷発展と変形図を示す。図中 (a) と (b) からは、物体分割手法を適用した結果の方がより亀裂が進展していることが確認できるが、(c) と (d) からは双方の亀裂進展が同程度であることがわかる。また、(e) と (f) を比較すると物体分割手法を適用した結果

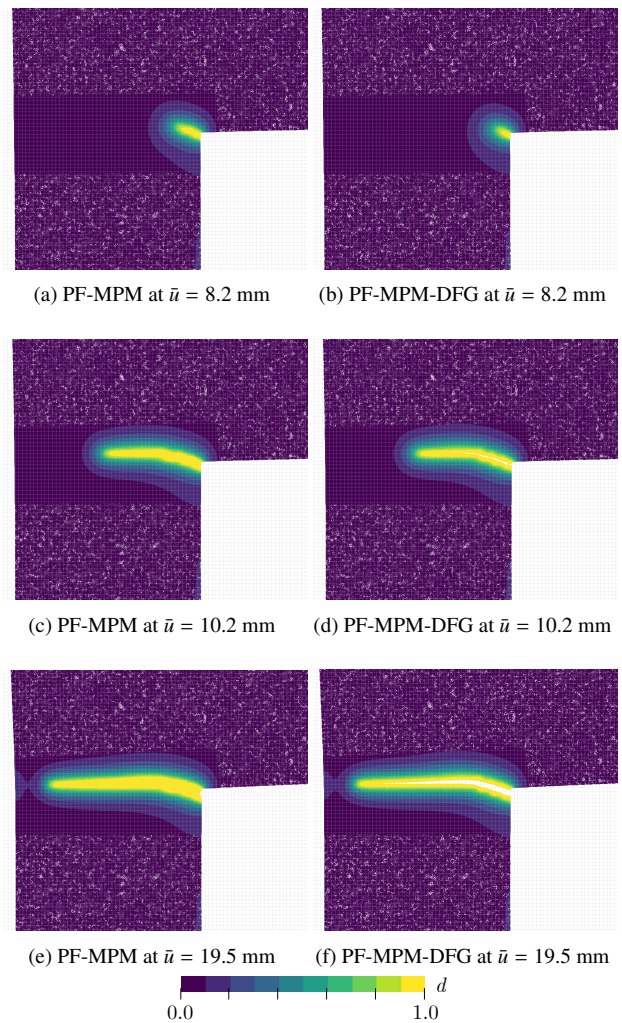


図-7: L型構造物の隅角部における損傷発展と変形図

の方が亀裂がより進展していることが確認できる。加えて (e) と (f) から、“PF-MPM”では亀裂の領域に粒子が分布しているのに対して、“PF-MPM-DFG”では隅角部の亀裂開口部から進展する離散的な亀裂形状を表現できていることが確認できる。以上より、提案手法が大変形下での破壊解析において離散的な亀裂面を表現可能であることを確認した。

## 5. 結論

本研究では、extended B-spline (EBS) 基底関数を用いた陰的 MPM による拡散亀裂から離散亀裂への遷移を表現する手法を提案した。EBS 基底関数により安定した陰解法を実現した MPM に phase-field 亀裂モデルを導入し、大変形下における亀裂進展解析を実施した。さらに PF 亀裂モデルにより得られた空間に連続分布した損傷場の空間勾配から拡散亀裂の中央を特定し、EBS 基底関数により拡散亀裂から離散亀裂への遷移を表現する手法を開発した。数値解析例を通して提案手法により典型的な引張破壊を再現できること、および大変形下において亀裂進展解析および物体分割手法による離散亀裂への遷移を適切に表現できることを確認した。

今後は既往研究の結果との定量的な比較を行い，提案手法による3次元亀裂進展解析を実施する．

#### 参考文献

- [1] G.A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 46, No. 8, pp. 1319–1342, 1998.
- [2] C Miehe, F Welschinger, and M Hofacker. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 83, pp. 1273–1311, 2010.
- [3] Michael A. Homel and Eric B. Herbold. Field-gradient partitioning for fracture and frictional contact in the material point method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 109, pp. 1013–1044, 2 2017.
- [4] Yuya Yamaguchi, Shuji Moriguchi, and Kenjiro Terada. Extended B-spline-based implicit material point method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 122, No. 7, pp. 1746–1769, 2021.
- [5] C. Miehe, M. Hofacker, and F. Welschinger. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 2766–2778, 9 2010.
- [6] Jike Han, Yuichi Shintaku, Shuji Moriguchi, and Kenjiro Terada. A transition scheme from diffusive to discrete crack topologies at finite strain during the course of a staggered iterative procedure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11 2022.