

ハイブリッド型ペナルティ法による三次元簡易斜面安定解析

Simplified Three-Dimensional Slope Stability Analysis by using Hybrid-type Penalty Method

山口清道¹⁾, 竹内則雄²⁾, 濱崎英作³⁾

Kiyomichi Yamaguchi, Norio Takeuchi and Eisaku Hamasaki

1) 博(工) JIPテクノサイエンス(株) (〒102-0074 東京都千代田区九段南1-3-1, kiyomichi_yamaguchi@cm.jip-ts.co.jp)

2) 工博 法政大学 教授 (〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-33, takeuchi@hosei.ac.jp)

3) 博(工) (株) アドバンテクノロジー (〒980-0013 仙台市青葉区花京院1-4-8, hamasaki@advanttechnology.co.jp)

The author proposed a numerical method for the three-dimensional slope stability analysis by using RBSM with the same input data as the simplified method. However, the ground deformation obtained by this numerical method was qualitative. On the other hand, to the evaluation of the stability of slopes, a method for using deformation of slope is discussed in recent years. Then, a simplified numerical method for the slope stability analysis in consideration of the deformation of slope is developed using HPM which can analyze stability equivalent to RBSM and can compute displacement and strain. In this paper, we discuss the outline of the proposed method, and the feature of the obtained solution.

Key Words : HPM, Slope Stability, Three-Dimension, Strain, Ground Deformation

1. はじめに

著者らは、Hovland法[1]やJanbu法などの簡便法[2]と同等の入力データを用いた剛体ばねモデル(RBSM)[3]による三次元簡易斜面安定解析法を提案した[4]。これは、従来の簡便法では主に斜面の安全率を求めており、斜面の変状に関する情報は得られないため、定性的ではあるが斜面の動きを把握することが目的であった。

近年、斜面の安定性を評価するために斜面の変形やひずみ状態などの変状を使用する方法が議論されている[5]。このためには、定量的な変状の把握が必要である。

一方、著者らは、ハイブリッド型仮想仕事の原理[6]に基づく離散化手法としてハイブリッド型ペナルティ法(HPM)を開発した[7][8]。この方法は、RBSMと同様に、要素境界面上の表面力を取り扱うため、RBSMと同等の離散化極限解析を行うことができる。また、要素内ひずみをパラメータとしているため、FEMと同等の変位解の精度を有する。

そこで、本論文では、RBSMを用いて開発した三次元簡易斜面安定解析法にHPMを適用し、簡便的に斜面の安定性を評価する手法を提案する。最後に、簡単な数値計算例を用いて、得られる解の特徴について述べる。

2. HPMの概要

HPMではハイブリッド型仮想仕事式[6]を用いて離散化する。これを示すと以下のとおりである。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \sigma : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda \cdot (\mathbf{u}_{<ab>}^{(a)} - \mathbf{u}_{<ab>}^{(b)}) \, dS \right) = 0 \quad (1)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \in V, \quad V \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \delta \mathbf{u} : \Omega \rightarrow R^3 \mid \delta \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \}$$

ここで、 $\mathbf{u}, \sigma, \epsilon, \mathbf{f}, \mathbf{t}$ は、それぞれ、変位、応力、ひずみ、物体力、要素境界面上の表面力を表している。また、 M は部分領域(要素)数、 N は隣接する部分領域境界面の数である。 $\mathbf{u}_{<ab>}^{(a)}, \mathbf{u}_{<ab>}^{(b)}$ は、図-1に示すように、隣接する領域境界面上の変位を表しており、この連続性を付帯条件として仮想仕事式に導入した式が、式(1)のハイブリッド型仮想仕事式である。

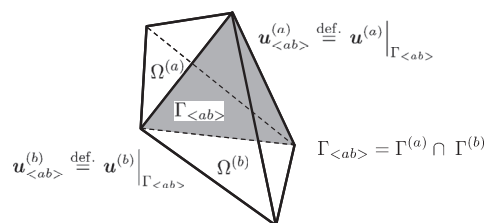


図-1 部分領域 $\Omega^{(a)}, \Omega^{(b)}$ と領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$

HPMでは、領域毎に独立な変位場を仮定する。いま、1次の変位場を仮定し、以下のように表す[8]。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\epsilon^{(e)} \epsilon^{(e)} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{d}^{(e)}, \epsilon^{(e)}$ は領域内の任意点における剛体変位と、ひずみである。また、 $\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\epsilon^{(e)}$ は座標に関する係数行列である。

一方、Lagrangeの未定乗数は、物理的には表面力を意味することから、隣接要素間の相対変位 $\delta_{<ab>}$ とペナルティ行列 $\mathbf{k}$ を用いて次のように仮定する。

$$\lambda_{<ab>} = \mathbf{k} \cdot \delta_{<ab>} \quad (3)$$

式(2)と(3)の関係を式(1)に導入すれば、HPMの離散化方程式が以下のように求まる。

$$\left(\sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{<s>} \right) \mathbf{U} = \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{W}_f^{(e)} + \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(e)}$ は要素(e)に関する剛性行列、 $\mathbf{K}_{<s>}$ は隣接境界<s>における付帯条件の項である。

3. 格子を用いたモデル化

斜面の安定性の正確な評価には、三次元斜面の正確なモデル化と解析が必要であろう。しかし、全ての斜面に対して精密な解析をおこなうには時間とコストがかかりすぎるため、本論文では、事前解析として、分割法[1][2]と同等のデータにより2章で述べたHPMによる安定解析を行う方法を提案する。図-2は斜面（左側）を格子に分割したモデル（中央）に対し、さらにカラム柱を分割しHPMの要素（右側）として利用した図を示している。

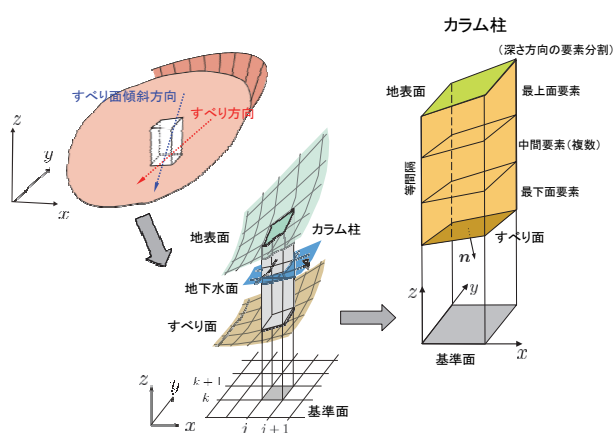


図-2 格子を用いたHPMのためのモデル化

RBSMを用いた同様の手法では、カラム柱を1要素でモデル化していた[4]。このため、変状を評価することが難しかった。一方、HPMは弾性変形を考慮することが可能である。そこで、図のようにカラム柱を最下層と最上層、その間の中間層に分け、精度に応じて中間層をさらに分割する方法を提案する。ただし、要素毎に材料を指定すると、結局、通常の三次元解析と同等な情報が必要となるため、平均的な値を用いてカラム柱で同一の剛性を用いる。

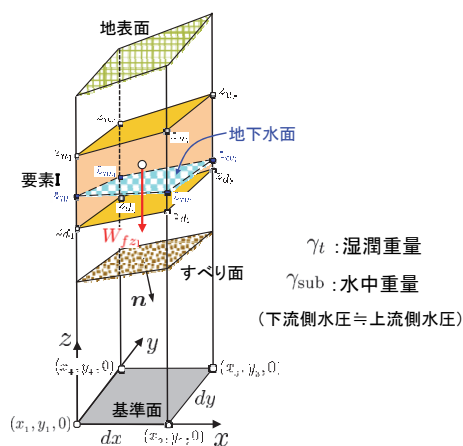


図-3 カラム重量

斜面安定解析において、自重は重要な破壊要因である。本論文では、剛性の場合と同じ理由から、平均的な単体積重量を用いてカラムの重量を計算し、安定解析の荷重として使用する。ただし、図-3に示すように、地下水面がある場合は、その影響を考慮して水中重量を用いる。

いま、図のようにあるカラム柱内の要素 I において、平均高さは

$$(\text{上面}) H_u = \frac{z_{u1} + z_{u2} + z_{u3} + z_{u4}}{4} \quad (5)$$

$$(\text{下面}) H_d = \frac{z_{d1} + z_{d2} + z_{d3} + z_{d4}}{4} \quad (6)$$

$$(\text{水面}) H_w = \frac{z_{w1} + z_{w2} + z_{w3} + z_{w4}}{4} \quad (7)$$

である。これを用いて、要素の重量を以下のように計算する。

$$H_w \leq H_d \quad W_{fz1} = \gamma_t \cdot (H_u - H_d) \cdot dx dy \quad (8)$$

$$H_w \geq H_u \quad W_{fz1} = \gamma_{\text{sub}} \cdot (H_u - H_d) \cdot dx dy \quad (9)$$

$$H_d < H_w < H_u \quad W_{fz1} = \gamma_{\text{sub}} \cdot (H_w - H_d) \cdot dx dy + \gamma_t \cdot (H_u - H_w) \cdot dx dy \quad (10)$$

さて、安定問題におけるもう一つの重要な要因として地震力をあげることができる。本論文では、動的問題としての取り扱いはせずに、設計水平震度を用いて、静的問題として取り扱う。図-4は地震力が作用したカラム柱の状態を示した図である。

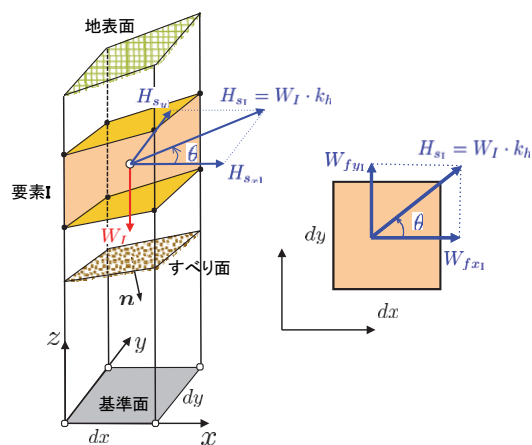


図-4 地震力

本論文では、要素 I の自重による重量を W_I とし、設計水平震度を k_h として以下のように求める。

$$H_{s1} = W_I \cdot k_h \quad (11)$$

荷重としては、以下のようにx方向成分とy方向成分に分解させて作用させる。

$$W_{fx1} = H_{s1} \cdot \cos \theta \quad (12)$$

$$W_{fy1} = H_{s1} \cdot \sin \theta \quad (13)$$

4. 付帯条件の処理と離散化方程式の誘導

本論文では、格子状に分割した特徴を利用し、以下に示すような接触面とコラム柱の剛性に対する取り扱いをおこなう。

(1) コラム柱側面（x方向）の付帯条件

図-5はコラム柱のx方向に対する接触状況を示した図である。図のように、それぞれの層毎に接続されているものとし、I 要素と II 要素の相対変位を

$$\delta_{\langle I-II \rangle} = B_{\langle I-II \rangle} U_{\langle I-II \rangle} \quad (14)$$

のように求める。ここで $\delta_{\langle I-II \rangle}$ は、相対変位 $U_{\langle I-II \rangle}$ はI 要素と II 要素の自由度、 $B_{\langle I-II \rangle}$ は、式(2)の係数が含まれる行列である。

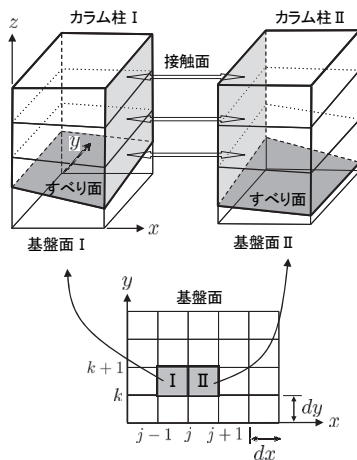


図-5 コラム柱側面（x方向）の付帯条件

一方、Lagrangeの未定乗数は、

$$\lambda_{\langle I-II \rangle} = k_{\text{side}} \cdot \delta_{\langle I-II \rangle} \quad (15)$$

と表す。このとき、 k_{side} はペナルティ行列で、

$$k_{\text{side}} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

とする。ここで、それぞれの係数は

$$k_n = \frac{(1+\nu)E'}{(1-2\nu)(1+\nu)dx}, \quad k_s = k_t = \frac{E'}{(1+\nu)dx}$$

であり、 p をペナルティ関数として、 E' を以下のように仮定する。

$$E' = E \times p \quad (17)$$

以上より、x方向の側面の付帯条件は以下のように離散化される。

$$H_{x\text{-side}} = - \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} B_{\langle I-II \rangle}^t k_{\text{side}} B_{\langle I-II \rangle} d\Gamma U_{\langle I-II \rangle} \quad (18)$$

(2) コラム柱側面（y方向）の付帯条件

y方向のコラム柱側面についてもx方向と同様、図-6に示すように、それぞれの層毎に接続されているものとして、付帯条件を処理する。

式(14)~(17)と同じ関係を用いると、最終的にy方向のコラム柱側面の付帯条件に関する離散化された関係が以下のように求まる。

$$H_{y\text{-side}} = - \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} B_{\langle I-II \rangle}^t k_{\text{side}} B_{\langle I-II \rangle} d\Gamma U_{\langle I-II \rangle} \quad (19)$$

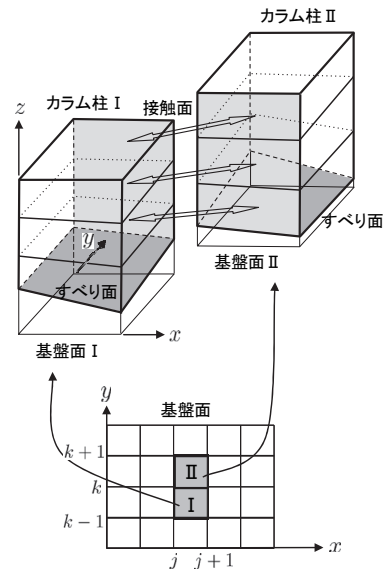


図-6 コラム柱側面（y方向）の付帯条件

(3) コラム柱上下面の付帯条件

コラム柱は、図-7に示すように、最低でも最下層、中間層、最上層の3つに分割する。分割は、地層や地下水面を無視し、等間隔に行う。したがって、必ず上下方向に接触面が構成される。

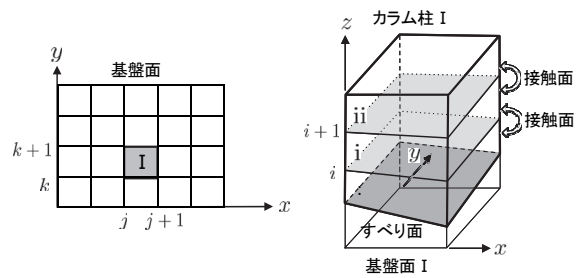


図-7 コラム柱上下面の付帯条件

側面における接触面はy-z平面、もしくはx-z平面と平行であるため、相対変位を求める際に座標変換は必要ないが、上下面に関しては、x-y平面を平行にならないため、一般的なHPMにおける相対変位の計算と同様に接触面の法線方向に関する座標変換を行う。このとき、相対変位は、座標変換行列を $R_{\langle i-ii \rangle}$ として、以下のように求まる。

$$\delta_{\langle i-ii \rangle} = R_{\langle i-ii \rangle} B_{\langle i-ii \rangle} U_{\langle i-ii \rangle} \quad (20)$$

一方, Lagrangeの未定乗数は

$$\lambda_{<i-ii>} = \mathbf{k}_{\text{vertical}} \cdot \boldsymbol{\delta}_{<i-ii>} \quad (21)$$

とする. ただし, ペナルティ行列 $\mathbf{k}_{\text{vertical}}$ は式(16)と同じであるが, 成分については以下のように仮定する.

$$k_n = \frac{(1+\nu)E'}{(1-2\nu)(1+\nu)h}, \quad k_s = k_t = \frac{E'}{(1+\nu)h}$$

ここで, $h = h_i + h_{ii}$ は, 上限面の平均高さであり, E' は式(17)の関係を用いる. この結果, 上下面の付帯条件に対する離散化された関係が以下のように求まる.

$$H_{\text{vertical}} = - \int_{\Gamma_{<ab>}} \mathbf{B}_{<i-ii>}^t \mathbf{k}_{\text{side}} \mathbf{B}_{<i-ii>} d\Gamma \mathbf{U}_{<i-ii>} \quad (22)$$

(4) カラム柱すべり面の付帯条件

すべり面における物性はRBSMと同じ取り扱いとし, 後述の方法ではね定数と材料強度を指定する.

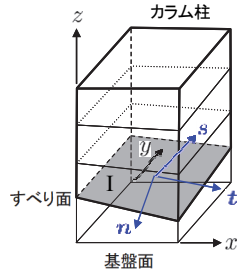


図-8 カラム柱すべり面の付帯条件

一方, 図-8に示す, すべり面の形状はアイソパラメトリック要素の考え方をを用いて以下のように求める.

$$z(x, y) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta) z_{\alpha} \quad (23)$$

このとき, 図-8に示すすべり面における法線ベクトルおよび接線ベクトルは以下のように求められる.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad (24)$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} \right) = s_y \mathbf{j} + s_z \mathbf{k} \quad (25)$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{k} \right) = t_x \mathbf{i} + t_z \mathbf{k} \quad (26)$$

すべり面における相対変位は, 基板側の地盤を拘束して, すべり土塊側の変位 $\mathbf{U}^{(I)}$ によって以下のように求める.

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{slip}} = \mathbf{R}_{\text{slip}} \mathbf{B}_{\text{slip}} \mathbf{U}^{(I)} \quad (27)$$

ただし, 座標変換行列 $\mathbf{R}_{<i-ii>}$ の成分は, 面の関係式(24)~(26)を用いて以下のように表される.

$$\mathbf{R}_{<i-ii>} = \begin{bmatrix} 0 & s_y & s_z \\ t_x & 0 & t_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

また, すべり面上のLagrangeの未定乗数については,

$$\lambda_{\text{slip}} = \mathbf{k}_{\text{slip}} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\text{slip}} \quad (29)$$

とし, ペナルティ行列 $\mathbf{k}_{\text{slip}}$ を式(16)と同様な形式に仮定する. このとき, 成分は

$$k_n = \frac{(1+\nu)E'}{(1-2\nu)(1+\nu)h_I}, \quad k_s = k_t = \frac{E'}{(1+\nu)h_I}$$

とする. ただし, E' については

$$E' = E_{\text{slip}} \quad (30)$$

とし, すべり面の係数を用いる. このとき, すべり面の付帯条件に対する離散化された関係が以下のように求まる.

$$H_{\text{slip}} = - {}^t\delta \mathbf{U}^{(I)} \int_{\Gamma_{<ab>}} \mathbf{B}_{\text{slip}}^t \mathbf{k}_{\text{slip}} \mathbf{B}_{\text{slip}} d\Gamma \mathbf{U}^{(I)} \quad (22)$$

(5) カラム柱の剛性

HPMでは, 要素内剛性も評価する. 始めに述べたように, 本論文では, 平均的な剛性を利用してこの影響と導入する.

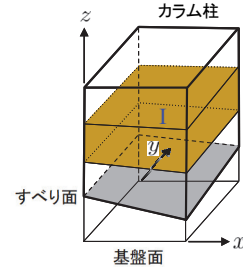


図-9 カラム柱の要素剛性

いま, 図-9に示すある要素 I に着目すると, ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{(I)}$ と応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(I)}$ は以下ようになる.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(I)} = \mathbf{B}^{(I)} \mathbf{U}^{(I)} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(I)} = \mathbf{D}^{(I)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)} \quad (24)$$

ここで, $\mathbf{B}^{(I)}$ は, ひずみと変位を関係づける行列, $\mathbf{D}^{(I)}$ は, 一般的な三次元弾性体の構成行列である.

このとき, 要素内剛性は以下のように表される.

$$W_{\text{column}} = {}^t\delta \mathbf{U}^{(I)} \int_{\Omega^{(I)}} {}^t\mathbf{B}^{(I)} \mathbf{D}^{(I)} \mathbf{B}^{(I)} d\Omega \mathbf{U}^{(I)} \quad (25)$$

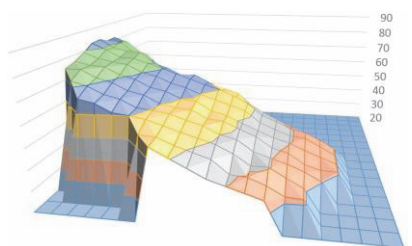
以上の結果をまとめると, 全エネルギーが以下のように求まる.

$$V = W_{\text{column}} + H_{\text{x-side}} + H_{\text{y-side}} + H_{\text{vertical}} + H_{\text{slip}} \quad (26)$$

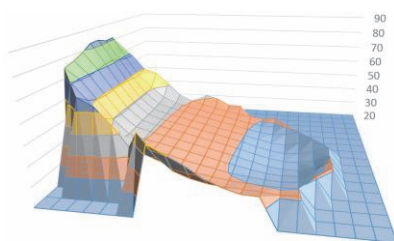
5. 数値解析例

(1) 常時安定解析

図-10は解析に用いたモデル斜面を表している。(a)が地表面の形状で、(b)が仮定したすべり面の形状である。



(a) 地表面



(b) すべり面

図-10 解析モデル

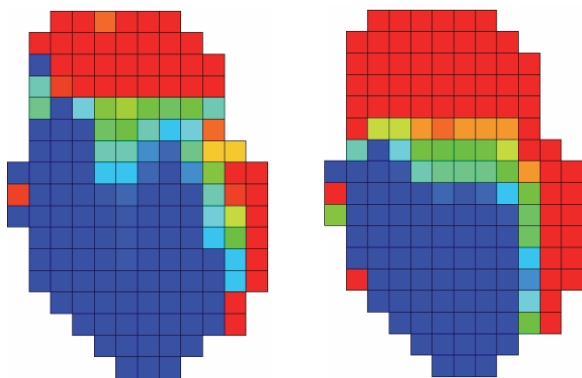
解析に当たり、斜面を10m格子で分割し、すべり面が地表面より下側に位置する格子を有効として解析した。解析に用いた材料定数は以下の通りである。

弾性係数	$E = 1 \text{ GPa}$	ポアソン比	$\nu = 0.2$
せん断強度	$C = 4.22 \text{ kN/m}^2$	内部摩擦角	22°
単位体積重量	$\gamma_t = 18 \text{ kN/m}^3$		

また、すべり面上のばね定数は以下のように仮定した。

$$k_n = \frac{(1+\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)h_l}, \quad k_s = 100 \text{ MPa/m}$$

図-11はすべり面の安全率を示した図である。赤色の格子が安全率1以下の箇所、青色の格子が安全率2以上の箇所を表している。



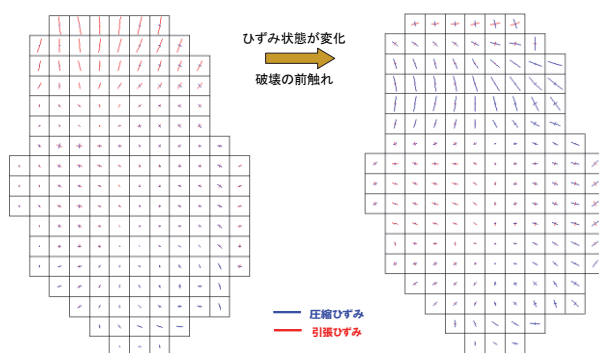
(a) 弾性解析(Fs=1.764)

(b) 非線形解析(Fs=1.747)

図-11 すべり面上の局所安全率分布

図(a)が弾性解析、(b)が非線形解析の結果で、斜面全体の安全率は前者が $F_s=1.764$ 、後者が $F_s=1.747$ で大きな差はない。これは、斜面が完全に崩壊していないためと考えられる。ただし、非線形解析の結果の方が、安全率が1、もしくはそれ以下の箇所が広く、破壊の進行にしたがって安全率低下領域が広がっている様子が現れている。

図-12は、地表面のひずみ分布（主ひずみ）を示した図である。赤が引張、青が圧縮ひずみである。弾性解析では、法先で圧縮ひずみが現れているが、法肩部分に大きな引張状態が生じており、すべりが止められている。非線形解析結果では、この部分にすべりが発生するため、ひずみが小さくなり、解放された土塊による圧縮領域が法先側に移動している。このことから、ひずみ状態の変化が破壊の全長を予測できる可能性を示しているものと思われる。

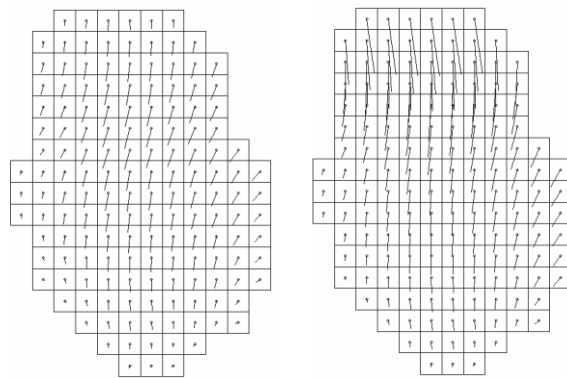


(a) 弾性解析(Fs=1.764)

(b) 非線形解析(Fs=1.747)

図-12 地表面のひずみ（主ひずみ）分布

図-13は、地表面の変位ベクトル図を示している。すべりの発生に伴い、法肩部分が最も変位が大きくなるはずが、弾性解析では、中央部より小さな変位になっている。これは、すべりを発生させていないことによる不自然な拘束によるためである。一方、非線形解析では、すべりが発生している箇所の変位ベクトルが最も大きく、法先部分のすべりが発生していない箇所による拘束状況がよく現れている。



(a) 弾性解析(Fs=1.764)

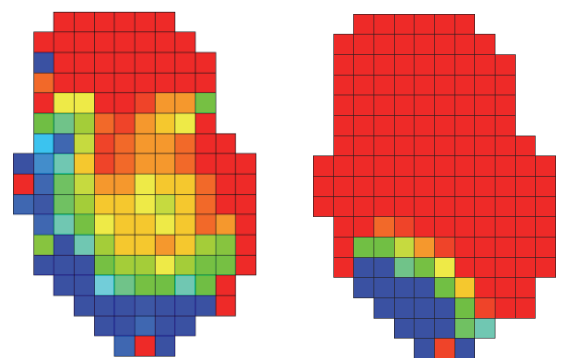
(b) 非線形解析(Fs=1.747)

図-13 地表面の変位ベクトル

(2) 地震時安定解析

図-10に示したモデルと同じ斜面を用いて地震時の安定解析をおこなう。外力として、 y 軸方向法先に向かって設計水平震度を $k_h = 1.5$ とし、3節で示した方法により地震力を考慮し、安定解析を行う。

図-14は地震力を考慮した場合の安全率と局所安全率の分布状況を示した図である。

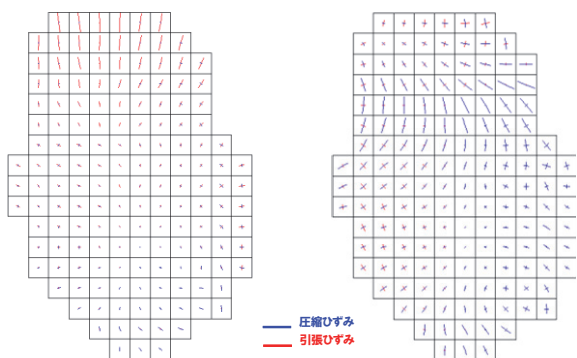


(a) 弾性解析($F_s=1.104$) (b) 非線形解析($F_s=1.155$)

図-14 すべり面上の局所安全率分布 (地震時)

斜面全体の安全率は、常時と異なり、弾性解析が非線形解析より小さな値となっている。一方、局所安全率の分布は、非線形解析の方が広い範囲で安全率が1、すなわち、すべりが発生している箇所が現れている。弾性解析の場合、安全率が1より小さくなるが、部分的に安全率が極端に低い箇所があると、全体の安全率が低下する傾向にある。本解析結果はその傾向が現れたものと思われる。

図-15は、地表面のひずみ分布を示した図である。弾性解析、非線形解析とも図-11で示した常時の解析結果と同じ傾向を示している。これは、地震力を y 軸方向法先に向かって作用させたため、すべりの方向や傾向自体はあまり変化がなかったためであると思われる。

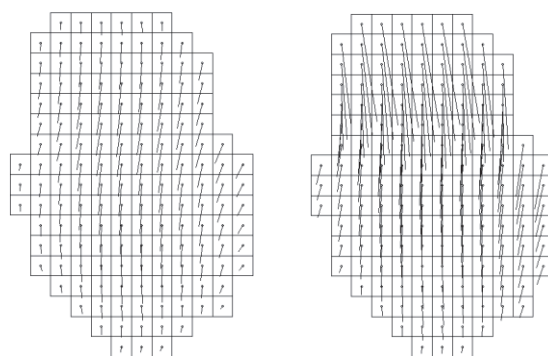


(a) 弾性解析($F_s=1.104$) (b) 非線形解析($F_s=1.155$)

図-15 地表面のひずみ (主ひずみ) 分布 (地震時)

一方、図-16は、変位ベクトル図である。ひずみの場合と同様、地震力を y 軸方向法先に向かって作用させているため、常時と傾向は同じである。しかし、変位のスケールは図-13で示した常時の場合と同じであるので、地震時の方が、弾性解析、非線形解析とも、より変形量が大き

くなっていることが分かる。



(a) 弾性解析($F_s=1.104$) (b) 非線形解析($F_s=1.155$)

図-16 地表面の変位ベクトル (地震時)

6. まとめ

本論文では、斜面の変位やひずみなどの変状を求めることができる、HPMによる三次元簡易斜面安定解析法を提案した。この方法によれば、すべり前後におけるひずみの変化や変位ベクトルの変化などを表現することが可能であった。現実の斜面の変状と一致させるためには、まだ、多くのデータの積み重ねが必要はあるが、従来の斜面全体の安全率では違いが見られないような斜面においても、変状による評価を加えることでより多角的な安定性の評価につながるものと考えられる。

参考文献

- [1] Hovland, H.J. and Asce, M.: Three-Dimensional Slope Stability Analysis Method, *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, pp.971-986, 1977.
- [2] 鶴飼恵三, 細堀建司: 簡易Bishop法, 簡易Janbu法およびSpencer法の三次元への拡張, 土木学会論文集, 第394号/III-9, pp.21-26, 1988.
- [3] Kawai, T.: New element models in discrete structural analysis, *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, No.141, pp.187-193, 1977.
- [4] 濱崎英作, 竹内則雄, 大西雄三: 三次元斜面安定問題に対する簡易離散化極限解析法の開発, 日本地すべり学会誌, Vol.42, No.5, pp.389-397, 2006.
- [5] 基礎地盤及び斜面の安定性に係る設計・リスク評価手引き, 原子力安全基盤機構, 2014.
- [6] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, *Pergamon Press, New York*, 1968.
- [7] Takeuchi, N., Tajiri, Y. and Hamasaki, E.: Development of modified RBSP for rock mechanics using principle of hybrid-type virtual work, *Analysis of Discontinuous Deformation: New Developments and Applications*, Research Publishing Service, pp.395-403, 2009.
- [8] 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集, No. 20010002, pp.53-62, 2001.