

# 粒子・“メッシュ法”による固体の数値解法

Numerical scheme for solid using particle - “mesh method”

今村純也<sup>1)</sup>

Junya Imamura

1) 博(工) imi計算工学研究室 (〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp)

In a previous paper, I have proposed a generalized force method (GFM), in which the simultaneous equation is constructed novel reduction method for the treatment of the continua. This report is part of research regarding Helmholtz theorem, to apply the Helmholtz decomposition ( $H$ - $d$ ) to the finite element method.  $H$ - $d$  is, however, in a certain coordinate expression. I proposed an improved  $H$ - $d$  expression called  $dHd$ . The  $dHd$  includes  $H$ - $d$  and other coordinate expressions. That is a multidirectional FEM concept. The objective of this report is; 1) firstly to transfer the particle-mesh model which is developed for flow field into solid analysis, 2) to represent the equation for solid in the transfer matrix which can very easily represent the rigid body rotations, 3) furthermore, rigid body rotation is represented in above  $dHd$  to express by vorticity, 4) propose quasi- $C^1$ -continuity element to represent the potentials in  $dHd$ , 5) finally to propose novel locking-free finite element method to avoid so called hour glass mode caused by use of incomplete  $n$ -the order element such as bi-linear element.

**Key Words:** Particle method, Particle-mesh method, PFEM, Solid analysis, Unit cell method (UCM), Locking-free finite element method, quasi- $C^1$ -continuity element method, Coulomb gauge.

## 1. 背景と概要

### (1) 目的と背景

本稿では、粒子・“メッシュ法”の固体への適用法を提示する。PFEM (Particle Finite Element Method) の六面体要素版でもある。

固体は一般に自由界面問題である。混相流解法として開発した＜粒子一直交格子法＞スキームを移転して、固体スキームを提示するものである。[1]

固体の特殊な条件として＜異種材料の混在、ポアソン比  $\nu \leq 0.5$  の材料、剛体回転、破壊進展、接触＞などがあり、それらを計算可能とするスキームである。

本稿は“Helmholtzの定理に基づく連続体理論の、有限要素法への適用に関する研究”の一環でもあり、Helmholtz分解( $H$ - $d$ )の視点からの、幾つかの新しい知見を、固体計算へ反映させる。[2]

知見の、先ずひとつは、 $H$ - $d$ 式は変位ベクトル場も、ひずみベクトル場も、更にはポテンシャルベクトル場も分解表示可能、とする点である。

変位ベクトル場  $\mathbf{u}$  をスカラーポテンシャル  $\varphi$  と、ベクトルポテンシャル  $\psi$  で、Lateral(縦)成分とTransverse(横)成分に分解表示する式は、Coulombゲージ( $\operatorname{div}\psi = 0$ )を付帯する。

ひずみベクトル場  $\mathbf{V}$  の分解式は同様に、Coulombゲージ( $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ )を付帯する。(連続の式である。)

MAC(Marker And Cell)法は、圧力ポテンシャルを介してCoulombゲージ( $\operatorname{div}\psi = 0$ )を満たす。

対してSMAC(Simplified MAC)法はひずみベクトル場

のCoulombゲージ( $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ )を満たす、などが、 $H$ - $d$ の視点からの、新しい解釈のひとつである。

またCoulombゲージは、体積式や体積ひずみ式に関する一般解( $=0$ の式の解)であり、圧縮性・非圧縮性に拘らず解いて、特解( $\neq 0$ の式の解)に加える必要がある。(微分方程式表示の固体解法全体が、その例外ではない。)

剛体回転(渦度  $\omega$ )はせん断ひずみ  $\gamma$  と対を成し、本稿では、互いに共役変数と呼ぶ。

Cauchy-Riemannの関係式は横成分に関して、( $\gamma = 0$ )を要求する。縦成分に関しても、いま一つの関係式(法線ひずみの差の式)を満たすよう要求する。

共役変数の概念を導入して、Cauchy-Riemannの関係式をいずれも数値的に満たし、数値Lockingの原因のひとつを排除して行く。

### (2) 離散Helmholtz分解( $dHd$ )

$H$ - $d$ の表示式は、渦度ベクトル場は演算子で表せるが、せん断ベクトル場はCoulombゲージを介して表す他ない、など、共役変数を表すには不便な場面・場合が多い。

そこで $H$ - $d$ 式を修正し、離散Helmholtz分解( $dHd$ )式を定義している。( [付録1] 参照。)

本稿モデルは、 $dHd$ 法に基づいて構築して行くものである。

$dHd$ 表示することで解った新たな知見がある。

流れ関数  $\psi$  は、2Dの変位・速度ベクトルの成分を  $\operatorname{curl}\psi$  で表す。その回転は  $\operatorname{curl}\psi$  で表すことになる。

ところで、2Dの回転は通常  $\operatorname{curl}\mathbf{u}$  で表すが、それをスカラーの  $\Psi$  で表すのは、z方向には剛体変位  $w^z$  で表して、

$\operatorname{curl}\Psi = \operatorname{curl}w^\# (\partial w^\# / \partial z = 0)$  とし,  $\operatorname{curl}w^\# = \operatorname{curl}\mathbf{u}$  である, ことが解り, それが本スキームでは重要な働きを成す. [3]

したがって  $\operatorname{curl}\psi = \operatorname{curl}\psi_3 (\partial\psi_3 / \partial z = 0)$  であり, 流れ関数のこれまでの知見は, 3Dへ一般化して適用し得る.

Locking-free有限要素法を提唱している. 完全  $n$  次式で表すことで, 数値 Locking のいま一つの原因である, 座標回転による Locking を回避すべし, とするものである.

双1次要素や, 3重1次要素を45°回転して, 菱型形状にあっても計算継続できるよう, 完全  $n$  次式を組み込むものである. (いわゆるアワーグラスモードの排除. )

$1 \times 1 \times 1$  の単位セル(UC)を用いる単位セル法(UCM)による写像計算, が本稿モデルの特徴であり, スキームの骨格を成す.

要するに,  $\nabla\mathbf{u}$  は9の自由度数を有し, Locking-freeで, 安定計算できるためには, 9以上の条件式を必要とする.

9以上の条件式を導出するのが離散 Helmholtz 分解法であり, 共役(共軛)変数の概念が基礎となる.

数値 Locking のいま一つの原因是, 双1次要素が典型例で, 不完全  $n$  次関数を適用することに在る.

本稿で, それらを網羅しての説明はできないので, 別報[3]～[5]を解説する形で示す.

## 2. 離散 Helmholtz 分解, 遷移行列法の必要性

### (1) 離散 Helmholtz 分解法の概念

本稿では粒子座標や, 要素頂点ノードの座標などをポテンシャル  $(\Phi + \Psi)$  の流通座標(current coordinates)で表して行く. そこで, 共通認識のため  $\Phi$  の用法を, はじめに説明して置く.

$H\text{-}d$  は, ひずみベクトル場  $\mathbf{V}$  を, Coulombゲージを制約条件として, 式(1)で分解表示する.

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \operatorname{curl}\Psi \quad (\operatorname{div}\Psi = 0) \quad (1)$$

式(1)を,  $\mathbf{V} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{curl}\Psi$  や,  $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$  で表示しなかったのは“意図がある”からである.

すなわち,  $H\text{-}d$  を修正して発展表示するためである. その発展形が  $dHd$  である.

$dHd$  は, 式(1)のひずみベクトル場  $\mathbf{V}$  の分解を, 式(2)で表示する.

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi^C + \nabla^1\Psi \quad (\operatorname{div}\Psi = 0, \nabla_{\operatorname{diag}}\Psi = \nabla\Phi) \quad (2)$$

$\nabla\Phi$  は縦成分の内の, 非圧縮成分であり,  $\nabla\Phi^C$  は圧縮・膨張成分である. ([付録2] 参照のこと. )

新しい演算子を式(3)のように定義し, 縦成分は新しいベクトル記号で, 横成分は演算子で表している. (前者も演算子と呼ぶ. )

$\nabla^1\Psi$  は, 総和規約に従う表示  $\partial\Psi_i / \partial x_j$  を表す.

$$\nabla\Psi = [\nabla_{\operatorname{diag}}\Psi, \nabla_{\operatorname{offd}}\Psi] \quad \left. \right\}, \quad (3)$$

$$\nabla^1\Psi = \nabla_{\operatorname{diag}}\Psi + \operatorname{offd}\Psi \quad \left. \right\}$$

$$\text{where } \nabla^1\Psi \equiv \nabla\Psi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \operatorname{offd}\Psi \equiv \nabla_{\operatorname{offd}}\Psi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって非圧縮は, 式(4)で表される. (前述のように, 圧縮・非圧縮に拘わらず解かなければならない式. )

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \operatorname{offd}\Psi \quad (\operatorname{div}\Psi = 0, \nabla_{\operatorname{diag}}\Psi = \nabla\Phi) \quad (4)$$

### (2) 有限変形式

式(2), 式(4)は微小変形理論(infinitesimal strain theory)に適用する分解式である.

本稿では“粒子一メッシュ”法へ適用するため, 有限変形理論(finite strain theory)に従う分解式を, 式(2), 式(4)に基づいて導き, 適用して行くものである.

有限変形の術語はいろいろな解釈があるが, 微小変形式が無限変形にも適用できるのに対し, 有限変形理論の変形式は物質微分で表すので, 数値計算では有限な領域:  $\Delta\mathbf{x} = \Delta t\mathbf{U}$  に適用する, と解釈する.

### (3) 共役変数の概念

$dHd$  では,  $\nabla^1\Psi$  の横成分(非対角成分)を  $\operatorname{offd}\Psi$  で表す他,  $\operatorname{curl}\Psi$  でも表し, せん断形を  $\operatorname{shr}\Psi$  で表すなど, (A+B)と(A-B)を共役変数と呼んで,  $\nabla\Psi$  の2成分のほぼすべての組み合わせを, 新しい演算子を定義して表し, 計算して行く.

基本的に,  $\nabla\Psi$  の9自由度数(成分数)の組み合わせを, 力学的に意味付けて, 演算子で表示するものである.

詳細はもう少し後述するが, Cauchy-Riemannの関係式を数値的に満たすなど, 桁落ち排除が目的である.

なお, Coulombゲージが代数的に(強解として)満たされれば,  $dHd$  は  $H\text{-}d$  に等しい.

### (4) 流線座標や粒子の回転などの考察による変位

$\Phi$  は流通座標で表し, 粒子の  $\Phi$  は流線上に在る.

シミュレーション開始(静止)時の, 当該粒子のデカルト座標  $\mathbf{X}_p$  を記憶して置き, 変位  $\mathbf{u}_p$  で更新して行く.

流線の接線方向, および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を, 流線座標(Lagrange座標)と呼べば, 縦成分は接線方向の, 横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力を, それぞれ表して行く.

変位は接線(縦)方向の  $\Phi$  のみである. ( $\Phi$  は流線の長さ. )

ただ, 粒子の自転は接線軸周りのみではなく, 他の軸周りもある. そこで  $\operatorname{curl}\Psi$  も流通座標で表す.

$\nabla\Phi$  も流線座標で表した勾配である。つまりは方向余弦である。したがってデカルト座標の変位： $\mathbf{u}_p = \Delta\Phi\nabla\Phi$  であり、 $\nabla^1\Phi = 0$  である。

同じく、 $\Delta\Phi\nabla^1\Psi_i$  は接線・主法線・陪法線方向を含めた、非圧縮の変位  $u_i$  を表す。

つまり、 $\mathbf{u} = \nabla^1\psi$  である。（ベクトル場のポテンシャル表示形、in case ( $\operatorname{div}\psi = 0$ )。）

よって  $(\Delta\Psi \cdot \nabla)\Psi$  で、デカルト座標上の変位  $\mathbf{u}$  を得る。つまり、非圧縮  $\mathbf{u}$  は、 $u_i = u_i \nabla u_i$  ( $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ ) である。結局、方向余弦の和は  $\nabla^1 u_i = 1$  であり、縦成分は  $= u_i \nabla u_i$  であり、残りは横成分である。（新しい知見。）

粒子自身は  $\operatorname{curl}\Psi$  分自転する。正確には  $\operatorname{sh}\Psi$  分小さく公転しながら自転する。

#### (5) 変位ベクトル場の $dHd$ 表示

念の為、変位ベクトル場  $\mathbf{u}$  の  $dHd$  表示式を式(5)に示して置く。

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi^C + \nabla^1\psi \quad (\operatorname{div}\psi = 0, \nabla_{\operatorname{diag}}\psi = \nabla\varphi) \quad (5)$$

式(5)は要素形状を表すためには必要であるが、本稿では  $(\Phi^C, \Phi, \Psi_i)$  で粒子の軌跡を表し、ノードの軌跡も同様にして表すので、式(5)の表示を使うことはない。

#### (6) 粒子-メッシュ法

本稿モデルは、粒子・“メッシュ法”であり、従来型の粒子法が得意とするメッシュフリー法ではない。<sup>†</sup>

六面体要素頂点ノード  $k$  の座標値  $\{x_i\}_k$  をそれぞれ、単位セルの頂点ノード値とし、3重1次要素で六面体形状を表す。

UCMで、六面体要素の独立変数  $x_i$  を計算していく。

四面体要素のPFEMに比べ、UCMによる六面体要素法が優る第一の点は、自動化し易いことに在る。

#### (7) 隣接要素

有限要素法は、隣接要素とノード（パラメータ）を共有することで適合させる。

セル頂点ノードを繋ぐ“メッシュ”の他、セル重心の粒子間を繋ぐ“双対メッシュ”を考える。

シミュレーション初期・静止状態の粒子・メッシュの座標を本籍（permanent address）と呼び、相互関係を本籍簿に記録し、移動中を現住所（current address）と呼ぶ。

移動中は直近の初期格子セルの重心を現住所とし、双対メッシュを組む。

双対メッシュの六面体セル重心を繋いで、初期直交メ

<sup>†</sup> メッシュフリー法でも、当該粒子は  $\{\varphi\}_{\operatorname{particle}} = 0$  とし、勾配パラメータ  $\{\nabla\varphi\}_{\operatorname{particle}}$  を、周囲の粒子との間で回帰計算して行く、ことで適用できる。

ッシュに対応する六面体メッシュを組む。

よって本籍簿を辿れば、隣接六面体要素が分る。

その六面体要素体積は初期の単位セル体積と数値計算上、差が出て来るので、Coulombゲージを満たすよう修正して行く。

粒子の移動点は、反復計算ステップ  $m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) で、仮想仕事式を解いて予測子を求め、次いで Coulomb ゲージを満たすよう予測子を修正する。その重心点位置で表す。

反復計算は収束するまで行い、収束すれば有限変形理論に対応する状態量を得る。

#### (8) 自転・公転

粒子運動では自転と公転が混在する。

フィギュアスケートの動きを観察すれば、3回転などは公転無しのキックだけではできず、公転を自転に変える運動が主体と言えよう。

終盤のスピン演技も、掌に注目すれば、公転を自転に変える動きを活用する、と言えよう。

月の地球周りの1回の公転には、1回の自転を伴う。したがって月の裏側は地球からは見えない。

それが回転  $\operatorname{curl}\mathbf{u}$  とせん断ひずみ  $\operatorname{sh}\mathbf{u}$  の関係である。非圧縮が  $\nabla\varphi^C$  が入ればその軌道から逸脱して行く。

#### (9) 遷移行列法

遷移行列法[6][7] は還元法[8] とも呼ばれ、伝達マトリクス法[9] とも邦訳されている。

通常、有限Taylor 級数で変位の要素関数を表すのに対し、遷移行列有限要素法では、勾配  $\nabla u_i$  以上の係数項には剛性  $\mathbf{G}$  を乗じて  $\{\nabla F_i\}_0$  ( $\equiv \mathbf{G}\{\nabla u_i\}_0$ ) で表す。

したがって、元の変位のTaylor 級数の勾配項の、係数は  $\{\nabla F_i\}_0/\mathbf{G}$  で表す。

混合変分法は、変位・ひずみの有限要素と遷移行列有限要素の2つを使って計算して行くものである。

隣接要素との連続性は、法線方向には応力が連続し、状態量ベクトルの計算（遷移行列法）が必要であり、界面並行方向は変位・ひずみを連続させるべきなので、変位法要素が必要である。

応力パラメータの変分行は仮想仕事変分式ではなく、応力の最小2乗変分式で組み込むこととなる。[13]

#### (10) Cauchy-Riemannの関係式（共役変数法）

数値Lockingの原因は2つある。

1つは、正方要素を45° 傾けた菱形になると、不完全  $n$  次要素では計算できない、のが典型的なLockingである。

菱形に近い亜菱形でも顕れてくるので、粒子と共に要素も自転する本モデルでは避け難い。

いま1つはCauchy-Riemann（C.-R.）の関係式を放置することで起る。

後者は(A+B)と(A-B)を共役（輻）変数と呼び、両方の方

程式を満たすことを要求している, と解釈できる.

つまりC.-R.の横成分式は, (A+B)形の Cauchyの応力式で表す方程式と, (A-B)形の 湍度で表す方程式を, 同時に解くことを要求している.

C.-R.の縦成分式 (A-B)=0 は, 変形すれば45° 座標回転系のせん断ひずみ式であり, (A+B)=0 の連続式と共に満たすことを要求する.

2つの式を同時に満たす  $\mathbf{u}$  を計算するため, それぞれ変数  $\Phi$  と  $\Psi$  で表して解いて行くのが  $dHd$  法である.

### 3. 数値計算スキーム

#### (1) 基本的考え方

準静的載荷問題とし, 加速度項は無しとし, 圧縮性でも計算は必須とした非圧縮計算法を示す.

最も一般的, かつ低次の3重1次  $\Phi$  要素で, Locking-free スキームを, 先ず示す.

#### (2) Locking-free 有限要素法

3重1次六面体  $\Phi$  要素に, 次の係数ベクトルの項:

$$\{\Phi^{(200)}, \Phi^{(020)}, \Phi^{(002)}, \Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$$

を加えて, (略)完全2次関数とする.

対応する新しいパラメータとして, 局所原点(重心)に,

$$\{\Phi^{(100)}, \Phi^{(010)}, \Phi^{(001)}, \Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$$

を設定する.

先ず, パラメータ:  $\{\Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$  の自由度で, 要素内せん断ひずみ  $(\Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)})$  の分布を, それぞれ最小化(最小2乗)する.

同様にして, C.-R.の縦成分式(45° 回転座標系のせん断ひずみ式)を, 残りのパラメータ自由度で,

$$(\Phi^{(100)} - \Phi^{(010)}) = 0,$$

$$(\Phi^{(010)} - \Phi^{(001)}) = 0,$$

$$(\Phi^{(001)} - \Phi^{(100)}) = 0$$

の最小2乗式で, 数値的に満たして行く.

#### (3) 仮想仕事式解法

3重1次要素による仮想仕事式解法は広く知られているので, ここには不完全2次(セレンディピティ)要素の適用法を示す. かつ, 連立方程式解法をSOR法で考える.

辺(稜)平行方向を  $s$  とし, 稜線上の座標を  $\{s, n, \zeta\}$  で表す. 中間ノードパラメータは  $s$  方向2階導関数で表す.

中間ノードの変位が知りたければ,  $s$  方向差分で2階導関数を表し, それによって換算する.

先ず非圧縮の式(6)を解くスキームを示す. ( $\mathbf{u} = \Psi$ )

$$G\nabla^2\mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

せん断ひずみは  $\Phi$  要素で, 剛体回転は  $\Psi$  要素で表し,

式(7)で分解表示する.

$$2\mathbf{u} = \nabla\Phi + (sh\Phi - curl\Psi), \quad (7)$$

$$where \nabla^1\Phi = 0, \nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi$$

#### (2) 非圧縮応力項の数値計算

ひずみ要素  $(\nabla\Phi, \nabla\Psi_i)$  を  $\Psi_i$  の例で示す.

有限Taylor級数  $\Psi_i(\mathbf{x}) = \{\mathbf{C}\}_0 \cdot \{1, x, y, z, x^2/2, \dots\}^T$  で表し, 20成分の係数ベクトル  $\{\mathbf{C}\}_0$  を式(8)に示し, ノードパラメータベクトルを図-1に示す. ( $\Phi$  要素も同様.)

$$\{\mathbf{C}\}_0 = \{\Psi_i^{(000)} \Psi_i^{(100)} \Psi_i^{(200)} \\ \Psi_i^{(010)} \Psi_i^{(110)} \Psi_i^{(210)} \\ \Psi_i^{(020)} \Psi_i^{(120)}\}$$

$$\Psi_i^{(001)} \Psi_i^{(101)} \Psi_i^{(201)} \\ \Psi_i^{(011)} \Psi_i^{(111)} \Psi_i^{(211)} \\ \Psi_i^{(021)} \Psi_i^{(121)}$$

$$\Psi_i^{(002)} \Psi_i^{(102)} \\ \Psi_i^{(012)} \Psi_i^{(112)} \}_0 \quad (8)$$

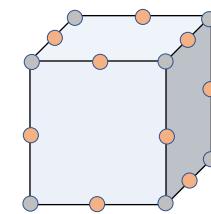


図-1  $\nabla\Psi_i$  勾配要素

反復回数を  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) とし, 式(9)を段階的に, SOR法で解いて行く. (勿論, 同時計算でもよい.)

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} [\delta \nabla \mathbf{U} \cdot G \nabla \mathbf{U}] d\Omega &= 0 \\ G \int_{\Omega} [\delta \nabla \Phi \cdot (\nabla \Phi - \nabla_{diag} \Psi) + \delta \nabla^1 \Phi \cdot \nabla^1 \Phi] d\Omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

かつ, 頂点ノードと中間ノードは交互に緩和していく. そのため中間ノードパラメータを2階導関数とした.

$\Phi$  要素のLocking-free計算のためには, (略)完全3次関数とする. すなわち, 次の係数ベクトルの項を加える.

$$\{\Phi^{(300)}, \Phi^{(030)}, \Phi^{(003)}, \Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$$

対応するノードパラメータは3重1次要素の場合と同じ,

$$\{\Phi^{(100)}, \Phi^{(010)}, \Phi^{(001)}, \Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$$

とし, C.-R.の関係式を同様に満たして行く.

#### (3) 応力項圧縮成分の数値計算

圧縮成分  $\nabla\Phi^c$  は式(10)で計算する.

$$\int_{\Omega} [\delta \nabla \Phi \cdot \frac{1}{1-2\nu} \nabla^1 (\Phi^C + \Phi)] d\Omega = 0 \quad (10)$$

変位要素  $\Phi^C$  は  $\Phi$  要素と、同じ要素形状が望ましい。

#### 4. 数値計算例

##### (1) 片持ちばかり

最も簡単な1Dの片持ちばかりの計算法で、勾配要素の適用法を示す。はりの勾配要素は傾角  $\theta$  である。

せん断たわみをTimoshenkoはり理論で組み込む。[10]

そのモデルは、従来法では、数値Lockingが表れる典型問題として知られる。

曲げ剛性を  $D_b$ 、せん断剛性を  $D_s$  とし、曲げたわみを  $w$ 、せん断たわみを  $w_s$ 、分布荷重を  $q$  として、はりの方程式は式(15)である。

$$D_b \frac{d^4 w}{dx^4} + D_s \frac{d^2 (w_s + w)}{dx^2} = q \quad (15)$$

仕事量の平衡は両辺に  $(w + w_s)$  を乗じて表される。

先ず、 $D_s = 0$  として  $w$  要素を計算する。 $w$  要素は2次関数で、中点ノードは2階導関数とする。

先ず中点たわみ  $w_0$  を設定し、 $\theta$  要素値はgivenとする。

差分式で2階導関数を表して、 $\theta$  要素の中点勾配値に等しいとし、 $w_0$  を消去する。

両端ノードのパラメータ  $\{w\}_k$  で表した2次関数で、式(15)の曲げたわみを解く。

ただし、 $\langle d(dw/dx - \theta)/dx \rangle = 0$  を制約(最小2乗)式として、数値的に満たして行く。(傾角の適合条件を取り入れるため。)

すなわち、式(16)を解く。

$$\int_{\Omega} [\delta \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot D_b (2 \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx}) - \delta w \cdot q] d\Omega = 0 \quad (16)$$

次いで  $D_s$  を考慮し、せん断たわみ  $w_s$  要素を計算する。

現実は3Dなので、たわみを  $z$  方向とすれば、 $x$ - $y$  は2Dモデル化して表す。

はりモデルは、更に1Dモデル化している。すなわち、 $y$  方向には変形無しの剛体として、3D変位の1Dモデル化を  $\{u, v^#, w + w_s\}$  ( $\partial v^#/\partial y = 0$ ) で表す。 $(u = z\theta)$

ただし、 $\langle \partial v^#/\partial x \neq 0, \partial v^#/\partial z \neq 0 \rangle$  であり、それぞれ  $z$ - $x$  面内の変形  $\langle \partial w/\partial x, \partial u/\partial z (= \theta) \rangle$  に対応している。

そこで、せん断ひずみは  $\langle \partial w/\partial x + \theta \rangle$  で表し、回転は  $\langle \partial v^#/\partial x - \partial v^#/\partial z \rangle$  で表して、2自由度には、あくまでも(共役変数の)2変数で対応して行く。

$\langle \partial v^#/\partial x - \partial w/\partial x \Rightarrow 0, \partial v^#/\partial z - \theta \Rightarrow 0 \rangle$  と回転

ゼロ  $\langle \partial v^#/\partial x - \partial v^#/\partial z \Rightarrow 0 \rangle$  を同時に、或いは2ステップで計算して行く、ものである。

##### (2) 平面版

1Dと2D・3Dの違いは、後者ではCoulombゲージが制約条件となり、非圧縮では面積・体積を保存して行かなくてはならない点である。

密度×Coulombゲージは質量保存式であり、数値計算スキームでは、他の2保存則より優先して満たして行かなくてはならない。

その技法は、既報[1]や別報[3]～[5]を参照されたい。

#### 5. まとめと今後の課題

固体は一般に自由界面問題である。そこで流れ場で開発した“粒子-メッシュ”モデルの、固体への移転を提案した。

固体では従来、変形を伴わない、として剛体回転は無視して来た。ただ、大変形を記述する有限変形理論では無視できず、破壊・接触などの計算では、むしろ重要な成分となる。

3重1次要素、2Dでは双1次要素が、45°回転すれば  $x^2$  項、 $y^2$  項が顕れて来る。

それを代表例として、Locking-free 有限要素法のいろいろな技法を提示した。

今後の課題は数値的検証にあるが、本モデルが広く認知されて、多くの人が検証され、更に発展されることが最大の課題と期待である。

##### [付録 1] 離散Helmholtz分解( $dHd$ )表示法

任意のベクトル場  $\mathbf{V}$  を、次式で分解表示する。

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi^C + \nabla^1 \Psi \quad (div \Psi = 0, \nabla_{diag} \Psi = \nabla \Phi) \quad (a)$$

$\nabla \Phi$  は縦成分の内の、非圧縮成分であり、 $\nabla \Phi^C$  は圧縮・膨張成分である。 $(\nabla^1 \Phi = 0, \nabla^1 \Phi^C \neq 0)$

$\nabla_{diag} \Psi$  は、 $\nabla \Psi$  の対角成分を表すとする。Coulombゲージにより自明であるが、念のため  $(\nabla_{diag} \Psi = \nabla \Phi)$  とした。

$\nabla^1 \Psi$  は、総和規約に従う表示  $\partial \Psi_i / \partial x_j$  を表す、とする。すなわち  $\nabla \Psi$  の行和で表すベクトルである。

$\mathbf{V}$  はひずみベクトル場を表すとして、変位ベクトル場  $\mathbf{u}$  は次式で表す。

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi^C + \nabla^1 \psi \quad (div \psi = 0, \nabla_{diag} \psi = \nabla \varphi) \quad (b)$$

更に、ポテンシャルベクトル場  $\psi$  は次式で表すとする。

$$\psi = \nabla v^C + \nabla^1 \lambda \quad (div \lambda = 0, \nabla_{diag} \lambda = \nabla v) \quad (c)$$

$\Phi^C = \nabla^2 v^C, \Phi = \nabla^2 v$  などの関係が在る。

他のベクトル場も、同様に表示して行く。

## [付録2] 流線上移動粒子の流通座標表示と回転

$\Phi$ は流通座標で表し、モデル粒子の $\Phi$ は、流れ場では流線上に在る。(定義では、質量粒子の軌跡が流線。)

$\Phi$ は流線の長さであり、流通座標値の変化は $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{u}$ である。

ここでは固体のベクトル場も表す意味を込め、かつ離散表示する意味も込めて、流線を“粒線”とも呼ぶ、とする。

つまり、1粒子の $\Phi$ のLagrange座標を流通座標で表す。或いは1粒線を流通座標で表す。

粒子-メッシュ法では、粒線群を流通座標表示し、粒線群を、有限要素関数で補間して連続表示する。

粒線の接線方向、および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を、粒線座標(Lagrange座標)とすれば、横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力としても表れる。

ただ、粒子の自転は接線軸周りのみではなく、他の軸周りもある。そこで $\text{curl}\Psi$ も流通座標で表す。

1粒子の流通座標を $\mathbf{X}_P$ で表し、初期(静止時)座標を $\mathbf{X}_0$ で表すとする。

$\nabla\Phi$ も流線座標で表した勾配となる。

$dHd$ では $\nabla\Phi = \nabla_{\text{diag}}\Psi$ で表すとした。 $\Phi$ のデカルト座標上の増分である。つまりは方向余弦であり、 $\Phi$ は非圧縮を表すとしているので、 $\nabla^1\Phi = 0$ である。

$\nabla\Phi$ は法線ひずみ(のデカルト座標表示)であり、相対量である。

静止時からの $\Phi$ の、方向別増分は $\Phi\nabla\Phi$ である。

時間ピッチ $\Delta t$ 間の増分を $\Delta\Phi$ とすれば、 $\Delta t$ 間の流通座標の増分:= $\mathbf{u}$ (非圧縮変位)であり、 $\mathbf{u} = \Delta\Phi\nabla\Phi$ である。

体積変化の増分は $\Delta\Phi^C\nabla^1(\Phi + \Delta\Phi^C)$ とし、一般解 $\nabla^1\Phi = 0$ を加えて表す。

$\Delta\Phi\nabla\Phi$ は座標回転して $= \mathbf{u}(s, n, \zeta)$ (:非圧縮、Lagrange座標。 $s$ が接線方向。)でも表す。

$dHd$ では $\nabla_{\text{diag}}\Psi = \nabla\Phi$ と定義したので $\Delta\Phi\nabla_{\text{diag}}\Psi = \mathbf{u}$ であり、 $\Psi$ のTaylor展開1次の項 $<\Delta\mathbf{X}_P \cdot \nabla\Psi>$ を速度表示 $< = \Delta t\Psi \cdot \nabla\Psi >$ して、縦成分 $< = \Delta t\Psi_i \nabla_{\text{diag}}\Psi >$ に着目すれば、 $< = \Delta t^2\Phi^2 = \Delta t^2(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2) >$ であり、 $\Phi$ は接線方向速度である。

(速度 $\Phi$ の) $\Delta t\Phi\nabla\Phi$ が $\Delta\mathbf{X}_P/\Delta t = \mathbf{u}_P/\Delta t$ である。

デカルト(Eulerian)座標型では $<\mathbf{U}_i = \Psi_i \nabla\Psi_i>$ であり、非定常では加速度項を加えて物質微分表示する。

流線(Lagrangian)座標型でも、流通座標表示では、同様である。

粒子自身は $\text{curl}\Psi$ 分自転する。正確には $\text{shr}\Psi$ 分小さく公転しながら自転する。

$\Delta\Phi\nabla\Phi = \mathbf{u}$ は流通座標で表示するとしたが、変位に追従して表す座標(粒線座標)であり、固体では有限変形理論の変位に追従して表す“有限変位座標”とも呼べよう。

有限変位座標表示の有限変位ベクトル $\Delta\Phi\nabla\Phi$ は、非線形であることに留意する。

準静的載荷の仮想時間 $\Delta t$ 後には、時間ステップを $n = 0, 1, 2, \dots$ として、 $\mathbf{u}^{n+1} = (1 + \Delta t)(\Delta\Phi\nabla\Phi)^n = (\Delta\Phi\nabla\Phi)^{n+1}$ であり、離散計算では仮想時間 $\Delta t$ は小さいほど、当然乍ら、粒線を精度高く表せる。

任意のベクトル場を表すとする $dHd$ では、 $\mathbf{u} = \nabla^1\Psi$ である。(ただし、in case ( $\text{div}\Psi = 0$ ))。

渦度の表示に関しては次の通りである。

上述で、回転 $\text{curl}\Psi$ もデカルト座標で表すとした。

$\text{curl}\Psi_3$ が $x-y$ 鏡面上の、流れ関数表示の渦度である。

ただし、 $\Psi_3$ は本来3D表示であり、2Dでは $z$ 軸方向は剛体( $\partial\Psi_3/\partial z = \partial w^z/\partial z = 0$ )であるが、スライスした $x-y$ 鏡面上の像は $z$ 軸方向に、パラパラ漫画の如く変動する。

それを、小さく公転しながら自転する、と表現した。

3Dの $\partial\Psi_3/\partial z \neq 0$ 分が公転で、 $<\partial\Psi_3/\partial y - \partial\Psi_3/\partial x>$ 分が自転(渦度・剛体回転)である。

地球の公転が粒線とすれば、月は地球の周りを小さく公転しながら、自転する、と考える。

小さな公転を $\text{shr}\Psi$ で表し、自転を $\text{curl}\Psi$ で表示するものである。(月の裏側は、地球からは見えない。)

かつ、 $\Psi_3$ の $z$ 軸周り $x-y$ 鏡面像のみではなく、 $\Psi_1, \Psi_2$ の小さな公転・自転も在り、複雑に回転する。

## 参考文献

- [1] Imamura, J. A one-by-one corresponding Particle / Cartesian cell (P/CC) model to apply to multiphase flow problems triggered by surface tension such as large, scaled water disaster, COMPSAFE2020, Kobe/Japan, (2020)
- [2] 今村: 離散Helmholtz分解要素法、並びに数値計算モデル、計算工学講演会, OS17, 2021.
- [3] 今村: 有限要素応力法:適合条件式解法、並びに変位法への統合、計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [4] 今村: 有限要素混合変分法:准C'連続な有限要素法、計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [5] 今村: 離散Helmholtz分解に基づくLocking-free有限要素法、計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [6] Falk, S. : Die Berechnung offener Rahmentragwerken nach dem Reduktionsverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.61-80.
- [7] Falk, S.: Die Berechnung geschlossener Rahmentragwerken nach dem Reduktionsverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.96-109.
- [8] R. Kersten 著、伊藤学訳:構造力学における還元法、技法堂、(1968).
- [9] 成岡、遠田:伝達マトリックス法、コンピュータによる構造工学口座I-2-B、培風館、(1970).
- [10] 今村:離散Helmholtz分解(dHd)表示に基づくMindlin板理論・ティモシェンコはり理論の考察と精解モデルの提案、理論応用力学論文集, 2022.