

IGAによる曲がりを有する3次元円管路流れ解析

Three-Dimensional Circular Pipe Flow Analysis with Bends by IGA

坂井祐仁¹⁾ 安井太一²⁾ 横山和男³⁾ 長谷部寛⁴⁾

Yuto Sakai, Taichi Yasui, Kazuo Kashiyama and Hiroshi Hasebe

¹⁾中央大学大学院 理工学研究科 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail: a19.appt@g.chuo-u.ac.jp)

²⁾中央大学大学院 理工学研究科 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail: a17.jjbr@g.chuo-u.ac.jp)

³⁾工博 中央大学 理工学部 教授 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail: kaz@civil.chuo-u.ac.jp)

⁴⁾博(工) 日本大学 理工学部 准教授 (〒 101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14, E-mail: hasebe.hiroshi@nihon-u.ac.jp)

This paper presents an application of IGA with NURBS functions to a three-dimensional circular pipe based on incompressible Navier-Stokes flow. For the discretization method, a stabilized finite element method based on the SUPG/PSPG method is applied for the spatial direction, and a second-order NURBS function is employed for the interpolation function. The Crank-Nicolson method is applied for the time direction. The validity and effectiveness of IGA is investigated.

Key Words : Isogeometric Analysis, NURBS, Incompressible Viscous Flow, Navier-Stokes Equation

1. はじめに

近年、任意曲面を有する解析手法として、IGA (Isogeometric Analysis) [1][2] が注目されている。

本研究では、IGA を用いた流体・構造連成解析手法の構築を目的とし、本報告ではその基礎的研究として、曲がりを有する 3 次元円管路流れ問題に対して NURBS 関数を用いた IGA を適用し、その妥当性と有効性の検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) 定式化

3 次元非圧縮性粘性流体の支配方程式は、以下に示す無次元化した Navier-Stokes の運動方程式と非圧縮条件の連続式の二つの方程式を用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域であり、 u_i は流速、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。

支配方程式 (1), (2) に対し、空間方向の離散化に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用い、時間方向の離散化として Crank-Nicolson 法を適用し、連続項の流速と圧力に関しては陰的に取り扱う。また、移流速度 \bar{u}_i は 2 次精度の Adams-Basforth 法により陽的に近似を行い線形化を施す。

(2) NURBS

本研究では形状関数に用いる Spline 関数として、制御点に付与される重みによって、少ない要素数で様々な形状を表現することができる NURBS 関数を用いた。

NURBS 曲面は二方向の B-Spline 基底関数と制御点に付与される重み、制御点の位置ベクトルによって表現される。B-Spline 基底関数とは式 (1) の Cox de Boor の漸化式によって定義される関数である。

$p = 0$ の場合

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$p = 1, 2, 3 \dots$ の場合

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

ここで、 N は ξ 方向の B-Spline 基底関数、 i は制御点番号、 p は B-Spline 基底関数の次数、 ξ_i はパラメータ空間の座標であるノットであり、ノットベクトルと呼ばれる一様増加する数列によって与えられる。このノットベクトルは CAD で描いた形状モデルから得られる数列である。式 (3) で表される B-Spline 基底関数を用いて NURBS の基底関数 $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ と NURBS 曲面 $S(\xi, \eta)$ はのように表される。

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (4)$$

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) B_{i,j} \quad (5)$$

ここで、 M は η 方向の B-Spline 基底関数、 j は η 方向の B-Spline 基底関数の制御点番号、 q は η 方向の B-Spline 基底関数の次数、 $w_{i,j}$ は物理空間の座標である制御点に付与される重み、 $B_{i,j}$ は制御点の位置ベクトルである。

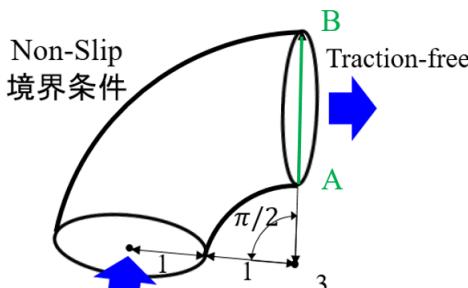


図-1 解析モデル

表-1 解析メッシュ(3次元円管路流れ)

	FEM		IGA	
要素数	384	3072	64	512
要素分割数	$4 \times 4 \times 4$	$8 \times 8 \times 8$	$4 \times 4 \times 4$	$8 \times 8 \times 8$
要素	P1要素(四面体1次要素)			

(3) 変数変換

IGA では形状関数である NURBS 基底関数がノット (ξ, η) から決定される関数であるので、物理空間 $\Omega_e(x, y)$ から親要素 $\bar{\Omega}_e(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ へ変数変換を行い、親要素上で積分を行うことで係数行列を求めていく。

3. 数値解析例

(1) 3次元円管路流れ問題

曲がりを有する円管について 3 次元非圧縮性粘性流れ解析を IGA により行った。

a) 解析条件

解析モデルと境界条件を図-1 に示す。境界条件としては管の側面に対し Non-slip 条件を与え、流入条件として最大値 1.0[m/s] の放物状に流速を与えた。また、微小時間増分量 Δt は 0.01[s]、総ステップ数を 50 とし、レイノルズ数 $Re=1.0$ の層流状態で解析を行った。

解析メッシュを表-1 に示す。2 次の NURBS 関数を用いた IGA と P1 要素（四面体 1 次要素）を用いた FEM の解析結果を比較した。また、IGA の積分計算の際の積分点数については NURBS の次数 +1 = 3 としている。

(2) 解析結果

解析結果として、図-2 に各メッシュにおける最終ステップでの流れ方向流速の可視化結果を示し、図-3 に最終ステップでの管出口における流速分布を示す。この結果より、IGA を用いた 3 次元円管路流れ問題について解析を行えること、有限要素法による結果と定性的に一致していることを確認した。また、図-3 より、補間に 2 次の NURBS 関数を用いることで、少ない要素数でも曲線的な流速分布をよく表現できていることがわかる。

表-2 に各メッシュにおける計算時間を示す。この結果より、3 次元解析において IGA では、FEM に比べ少ない要素数でも自由度数が多くなり、計算時間の優位性を示すことが難しいことがわかる。

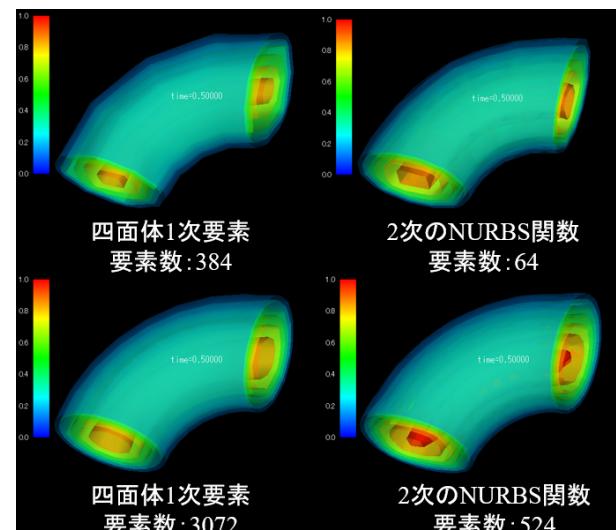


図-2 最終ステップでの流れ方向流速

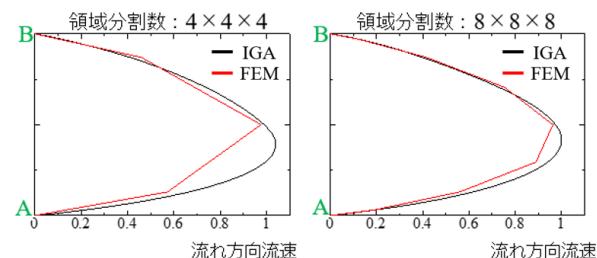


図-3 最終ステップでの管出口の流速分布

表-2 計算時間の比較

	FEM		IGA	
要素数	384	3072	64	512
自由度数	125	729	216	1000
計算時間	0.109[s]	1.406[s]	424.5[s]	3418[s]

4. おわりに

本研究では、NURBS 関数を用いた IGA による非圧縮性粘性流れ問題の解析手法について述べ、適用例として 3 次元の曲がりを有する円管路流れ解析に取り組み、妥当性と有効性の検討を行った。

FEM との定量的評価および、補間に用いる NURBS 関数の次数と積分点数の差異による比較等については講演時に示す予定である。

参考文献

- [1] T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- [2] J.A.Cottrell, T.J.R.Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA, Wiley Publishing, 335p, 2009.