

# 粘性項を活用した動的陽解法 FEM による弾性体の つり合い解の探索

## Analysis of Equilibrium Solution by Dynamic Explicit FEM Considering Viscous Term

真鍋圭司<sup>1)</sup>

Keiji Manabe

<sup>1)</sup>博 (工) 福山大学 工学部 教授 (〒 729-0292 広島県福山市東村町字三蔵 985 番地の 1, E-mail: manabe@fukuyama-u.ac.jp)

Dynamic explicit FEM (Finite Element Method) can simulate large scale problems by simple algorithm, because it does not solve simultaneous equations. In this paper, the viscous term is introduced into dynamic explicit FEM in order to obtain complete static solution of elastic deformation problems. The calculations are carried out for the deformation of rectangle beam under two kinds of boundary conditions, lateral and longitudinal load. Number of calculations until static solution is reached, and transition process of deformation vibrations is discussed. It is found that graph of the FEM result of free vibration is effective for determining coefficient of critical damping to static solutions.

**Key Words :** Dynamic explicit FEM, Equilibrium state, Viscous term, Critical damping

### 1. はじめに

有限要素法（以下 FEM と略記）による応力解析は、つり合い状態を求める静的解析が多い。この静的 FEM 解析では連立方程式を解くことが必要となる。

一方、動的解析も FEM によって、振動問題など加速度運動を伴う問題も解析できる。この動的 FEM において、時間積分に陽解法を用い、質量行列を対角部分に集める近似をすると、連立方程式を解くことが不要となる。これが動的陽解法 FEM という解法であり、これによって弾塑性問題などの静的解析を近似的に行う方法がある [1]。これは節点力の不釣り合いを残したまま変形を追跡する方法である。変形過程は節点の小さな振動を伴うが、静的解析に対応した情報を得ることができる。この解法は連立方程式を解く処理がなく、全体剛性行列も作成しないため、計算メモリを節約できる。著者らも動的陽解法 FEM を導入し三次元切削加工のシミュレーションを行った [2][3]。

動的陽解法はプログラムが簡単であるため、簡易的に FEM 計算を行うのに適していると思われる。そこで本報告では、動的陽解法 FEM に粘性項を導入し、振動を強制的に減衰させ、完全なつり合い状態に収束させることを考えた。この考えは、古くから存在していて、動的緩和法といわれるものである [4][5]。

ここでは、細長い棒（はり）を解析対象とし、横荷重と縦荷重が作用する問題を考え、それらの境界条件の変化に対応できる粘性減衰の考察を行った。

### 2. 動的陽解法 FEM への粘性項の導入

#### (1) 動的陽解法の定式化

静的弾性問題の FEM において、系全体のつり合い条件は次の連立方程式で表される。

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (1)$$

ここで、 $[K]$  は全体の剛性行列である。 $\{u\}$  は変位ベクトル、 $\{P\}$  は外力ベクトルである。

動的問題においては、式 (1) に質量項と粘性減衰項を追加した次式を用いる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (2)$$

ここで  $[M]$  は質量行列、 $[C]$  は粘性減衰行列である。本報告では、 $\{u\}$  の時間変化を計算し、最終的に  $\{\ddot{u}\}$  と  $\{\dot{u}\}$  がゼロとなり、式 (1) を満たすつり合い解を求める。

いま、 $\{u\}$  の時間微分を、中心差分によって次のように近似する。

$$\{\ddot{u}\} = \frac{\{u\}^{n+1} - 2\{u\}^n + \{u\}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3)$$

$$\{\dot{u}\} = \frac{\{u\}^{n+1} - \{u\}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (4)$$

上添字は時間ステップを表す。これらを式 (2) に代入し、整理すると次のようになる。

$$\left( [I] + [M]^{-1}[C] \frac{\Delta t}{2} \right) \{u\}^{n+1} = 2\{u\}^n - \{u\}^{n-1} + [M]^{-1}(\Delta t)^2 \left( \{P\} - [K]\{u\}^n \right) + [M]^{-1}[C] \frac{\Delta t}{2} \quad (5)$$

ここで、 $[I]$  は単位行列である。

いま、行列  $[M]$ 、 $[C]$  を対角行列にする。動的陽解法 FEM では、 $\rho$ 、 $c$  を入力する。 $\rho$  は（質量の）密度である。また粘性減衰係数も単位体積あたりの量で考え、これを  $c$  とする。 $c$  を「粘性密度」と呼ぶことにする。

1 つの要素において、それら  $\rho$ 、 $c$  に要素の体積を  $V_{elm}$  をかけて、要素に属する節点に、均等に振り分ける。

$$\text{要素 } \rho V_{elm} \longrightarrow \text{節点 } \frac{1}{n_{elm}} \rho V_{elm} \quad (6)$$

$$\text{要素 } c V_{elm} \longrightarrow \text{節点 } \frac{1}{n_{elm}} c V_{elm} \quad (7)$$

ここで  $n_{elm}$  は、1つの要素に属する節点数であり、例えば4節点四角形要素の場合は  $n_{elm} = 4$  である。

これら要素の節点量を、全体行列に組み込む。全体に組み込んだ質量、粘性減衰係数をそれぞれ  $M_i$ 、 $C_i$  と書く。これらは次の形の対角行列となる。

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & M_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & C_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & C_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (9)$$

これを用いると、

$$[M]^{-1}[C] = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{M_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{C_2}{M_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{C_3}{M_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (10)$$

であるから、式(5)の左辺のカッコ内は

$$[I] + [M]^{-1}[C] \frac{\Delta t}{2} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{C_1}{M_1} \frac{\Delta t}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 + \frac{C_2}{M_2} \frac{\Delta t}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 + \frac{C_3}{M_3} \frac{\Delta t}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (11)$$

と対角行列で表すことができる。この  $i$  行目の対角成分の一部を

$$\Theta_i = \frac{C_i}{M_i} \frac{\Delta t}{2} \quad (12)$$

とおき、式(5)の中の行列の積  $[K]\{u\}^n$  を

$$[K]\{u\}^n = \{f\}^n \quad (13)$$

と  $\{f\}^n$  で表す。この積は全体行列  $[K]$  を作成せずに計算できる。次節で詳細を述べる。

以上のように行列が対角成分のみにできたので、 $i$  行目の独立した式で表すことができる。たとえば前述の  $\{f\}^n$  は、 $f_i^n$  のように下添字  $i$  をつけて成分表示する。ここで

$$A_i = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{M_i} (P_i - f_i^n) + \Theta_i u_i^{n-1} \quad (14)$$

とおくと、式(5)は

$$u_i^{n+1} = \frac{A_i}{1 + \Theta_i} \quad (15)$$

と簡単に書くことができる。これによって  $|u|$  の時間変化を、陽的に計算してゆく。

## (2) 線形弾性体の $[K]\{u\}^n$ の計算

式(13)の、全体行列  $[K]$  と変位  $\{u\}^n$  のかけ算を行う。全体行列  $[K]$  は計算機メモリを多く消費する。動的陽解法では、この全体行列  $[K]$  を作成せず、要素の剛性行列  $[K_{elm}]$  で処理する。

ここで取り扱うのは、線形弾性体とする。その場合要素剛性行列は、

$$[K_{elm}] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (16)$$

である。これに要素の変位ベクトル  $\{u_{elm}\}^n$  をかけて要素の節点力ベクトル  $\{f_{elm}\}^n$  を求める。

$$[K_{elm}]\{u_{elm}\}^n = \{f_{elm}\}^n \quad (17)$$

この  $\{f_{elm}\}^n$  を系全体の  $\{f\}^n$  に組み込む。この処理によって系全体の剛性行列  $[K]$  を作成せずに  $\{f\}^n$  が計算できる。

物体内部では、この  $\{f\}^n$  は、節点力の不釣り合い量を表す。減衰の効果によって、時間ステップ  $n$  が大きくなるにつれて不釣り合い量は小さくなる。これが十分にゼロに近づいたとき、釣り合い解が求まったとして、計算を終了させる。

## 3. 計算モデルと計算条件

**Fig.1** に計算モデルを示す。長さ  $l$ 、高さ  $h$  の長方形(棒)であり、横荷重(長さ方向と垂直な荷重)と縦荷重(長さ方向の荷重)の2つの場合を考える。 $l = 200 \text{ mm}$ 、 $h = 20 \text{ mm}$  とし  $2 \times 20$  個の4節点四角形要素で分割し、4点のガウス積分で計算した。ヤング率  $E = 205,800 (= 21000 \times 9.8) \text{ MPa}$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$  の等方線形弾性体とする。また密度は鉄の  $\rho = 7.83 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$  を用いた。

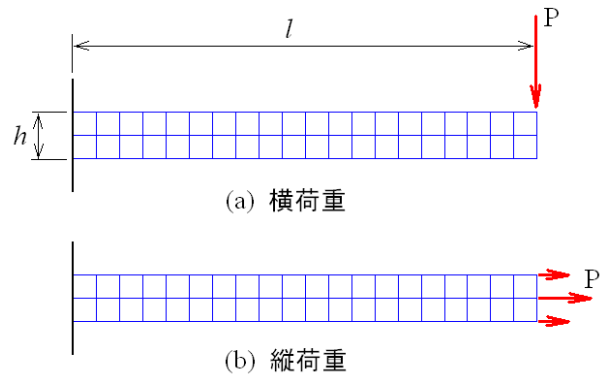


図-1 横荷重と縦荷重の FEM 計算モデル

**Fig.1** の (a) は横荷重がかかる場合であり、左端の部分を固定し、 $x = l$  の右端の上隅部の1点に集中荷重  $P$  を作用させる片持ちばりの問題である。 $P = 100 \text{ N}$  とし、荷重点の変位(たわみ)  $\delta$  は、材料力学によって、

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} = 1.943 \text{ mm} \quad (18)$$

となる。ここで、断面二次モーメント  $I = bh^3/12 = 1 \times 20^3/12$  で計算した。

(b) は縦方向に荷重かかる場合であり、(a) と同じく左端の部分を固定する． $x = l$  の部分に荷重を3つの節点に分配して作用させる．荷重  $P=4000$  N とし、 $1000+2000+1000$  の節点力に振り分けて与えた． $x = l$  の部分の変位を  $\delta$  とすると、材料力学の公式から、

$$\delta = \frac{Pl}{EA} = 0.1943 \text{ mm} \quad (19)$$

となる（式 (18) の  $1/10$  になるように条件を選んだ）．ここで、断面積  $A = bh = 1 \times 20 = 20 \text{ mm}^2$  である．

**Table1** に荷重と変位から計算した弾性係数の理論値を示す．縦変形に比べて横変形の弾性係数は400倍小さく、400倍変形しやすいことがわかる．

表-1 荷重と変位の理論値

	荷重 $P$ (N)	変位 $\delta$ (mm)	弾性係数 $P/\delta$ (N/mm)
横変形	100	1.943	51.4
縦変形	4,000	0.1943	20586.7

FEM 計算の時間増分  $\Delta t$  は、弾性波が1ステップで要素の幅を超えないような制約から、次で与えた．

$$\Delta t = 2.0 \times 10^{-7} \text{ (s)} \quad (20)$$

荷重  $P$  は、100等分して最初の100ステップで与えた．

つり合い解に達したかの判定は、式 (13) の  $\{f\}^n$  で節点 I の  $x$  成分、 $y$  成分を  $p_{xI}$ 、 $y$  成分を  $p_{yI}$  と書いて、1節点あたりのつり合い量

$$\frac{1}{n_{\text{point}}} \sum_{I=1}^{n_{\text{point}}} \sqrt{(p_{xI})^2 + (p_{yI})^2} < 10^{-6} \quad (21)$$

で計算終了の判断を行った． $n_{\text{point}}$  は総節点数である．

## 4. FEM 計算結果

### (1) 横荷重問題

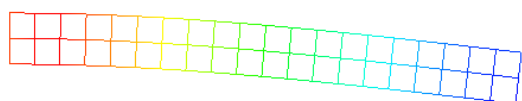


図-2 横荷重による変形状 (P=100 N, 変位 10 倍)

**Fig.2** が要素変形図である．片持ばりがたわんだ状態が表されている．この計算結果は、粘性の効果によって式 (21) を満たして、つり合い解へ到達した状態である．つり合い状態の荷重点の変位は、 $-1.5485 \text{ mm}$  であった．これは理論解の式 (18) と比べて低い値であり、いわゆるせん断ロッキングが生じている．

いま、つり合い解に到達するまでの計算回数を  $N$  とする．粘性密度  $c$  を変化させて、 $N$  の変化を調べた結果を **Fig.3** に示す． $c$  の単位は  $\text{Ns/m}^4$  であるが、以降省略する．図には、荷重  $P=10$  ( $1/10$  の荷重) の場合も参

考のために示しているが、 $P=100$  の場合とほぼ同じ傾向を示している． $c$  が  $0.01$  など小さいと約 20 万回の計算回数を要しているが、 $c$  が大きくなると  $N$  は減少し、 $c=0.045$  のとき  $N$  が 28,643 回の最小の値になった．さらに  $c$  を大きくすると、 $N$  は増加することが分かる．

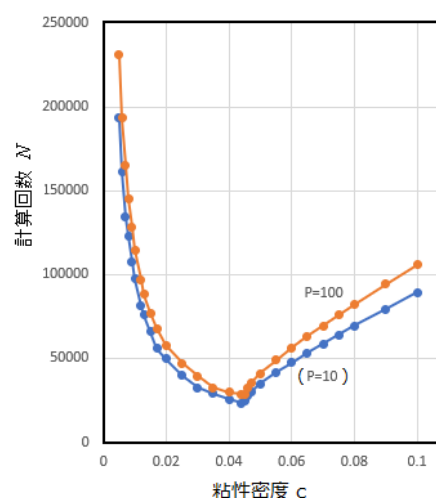


図-3 粘性密度  $c$  との計算回数の  $N$  関係 (横荷重)

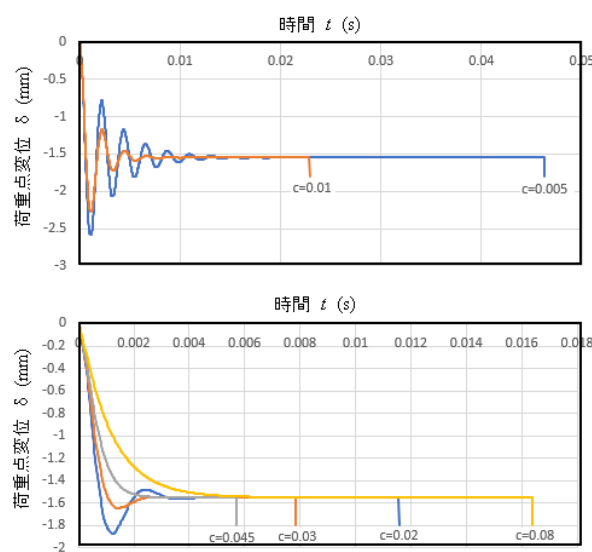


図-4 荷重点変位の時間変化 (横荷重)

**Fig.4** に、粘性密度  $c$  の変化による荷重点の変位  $\delta$  の過渡変化を示す．グラフの横軸は経過時間であり、計算回数  $N$  に  $\Delta t (= 2.0 \times 10^{-7})$  を乗じた値である．

図中、例えば「 $c = 0.01$ 」、「 $c = 0.02$ 」などと示しているが、その示した場所がつり合い解に達して計算を終了した所（時間）である．

上の図が  $c=0.005$  と  $c=0.01$  の場合であり、振動が減衰しながらつり合い状態に達している様子がわかる．下の図が  $c=0.02, 0.03, 0.045, 0.08$  の場合である．振動は生じずにつり合い解に到達している．いずれの  $c$  の値でも、 $\delta = -1.5485 \text{ mm}$  に到達するが、 $c = 0.045$  の場合

が一番早くつり合い解に達することがわかる。

## (2) 縦荷重問題



図-5 縦荷重による変形形状 (P=4000 N 変位 100 倍)

次に縦荷重の問題を考える。Fig.5 が要素変形図である。荷重点の変位は3点とも等しく、0.1761 mm であった。これは理論解、式 (19) と比べてやや低い値である。

粘性密度  $c$  を変化させた場合の  $N$  の変化を Fig.6 に示す。図には、荷重  $P=4$  万 (10 倍の荷重) の場合も参考のために付記しているが、 $P=4000$  の場合とほぼ同じ傾向を示している。

横変形の場合に比べて  $N$  は1ケタ少なく、つりあい解に達するまで3千回～3万回の計算回数を要している。この計算においては、 $c=0.65$  で  $N$  が2,430回で最小であった。

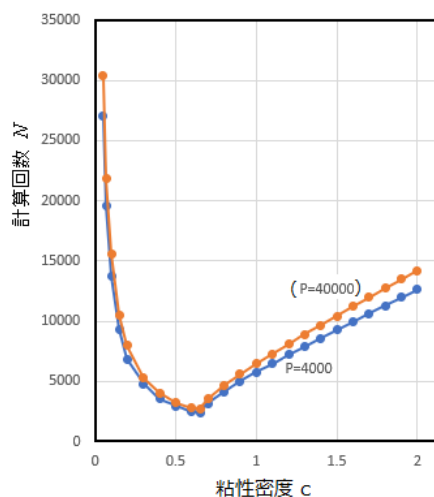


図-6 粘性密度  $c$  との計算回数  $N$  関係 (縦荷重)

Fig.7 に、右端の上隅部の変位の過渡変化を示す。上の図が  $c=0.05$  と  $c=0.1$  の場合であり、振動が減衰しながらつり合い状態の値 0.1761 mm に達している様子がわかる。下の図が  $c=0.3, 0.6, 0.8$  の場合である。振動は生じずにつり合い解に到達している。

## (3) 考察

以上で述べたように、粘性密度  $c$  を変化させると、計算回数  $N$  が大きく変化する。少ない計算回数でつり合い解に達することが望まれる。そこで、つりあい状態に早く達するための粘性減衰係数  $C$  や粘性密度  $c$  の値を選ぶ方法について考える。横荷重問題と縦荷重問題などの境界条件の違いをどのように取り扱うかが問題となる。

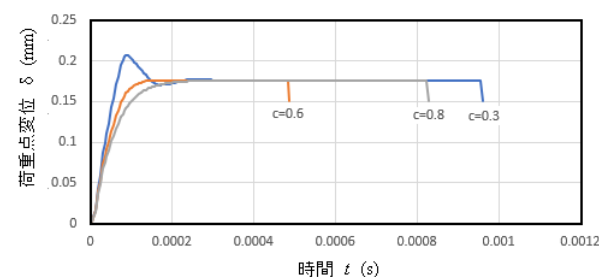
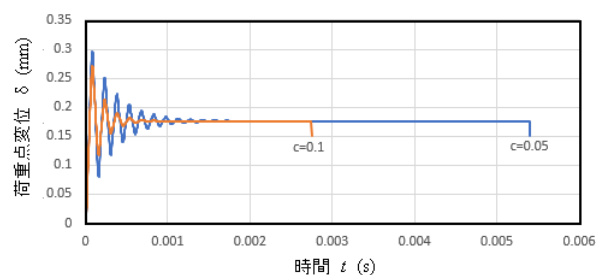


図-7 荷重点変位の時間変化 (縦荷重)

1次元のバネ減衰問題は、質量を  $m$ 、バネ定数を  $k$  としたとき、 $u$  をつりあい状態からの変位として

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (22)$$

である。解を  $u = a \exp(\lambda u)$  とおくと特性方程式

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (23)$$

が得られる。この判別式  $D = 0$  とおくことで、臨界減衰係数  $c_c$  を求められる。

$$c_c = 2\sqrt{mk} \quad (24)$$

この状態が一番早くつりあい状態に達する。

一般の問題では、弾性係数  $k$  は荷重条件によって変化する。Table2 に今回の FEM 計算結果から算出した  $k$  を示す。モデル右端の上隅部のもので、変位は  $x, y$  成分を両方書いている。 $k$  の計算に関係しない変位はカッコに入れているが、後に、式 (30) の所で参照する。

表-2 FEM 計算結果の荷重点変位から算出した弾性係数  $k$

	P (N)	$\delta_x$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$k$ (N/mm)
横変形	100	( 0.1157 )	-1.5485	64.57
縦変形	4,000	0.1761	( -0.0037 )	22714.3

前述した、最も早くつり合いに達した粘性密度  $c$  を

$$\text{横荷重の場合 } c_Y = 0.045$$

$$\text{縦荷重の場合 } c_X = 0.65$$

と書く。この比は  $c_Y/c_X = 0.045/0.65 = 0.069$  である。式 (24) でこの比を評価すると、質量は等しいから

$$\frac{c_Y}{c_X} = \frac{2\sqrt{mk_Y}}{2\sqrt{mk_X}} = \sqrt{\frac{k_Y}{k_X}} = \sqrt{\frac{64.57}{22714.3}} = 0.0533 \quad (25)$$

となる．やや近い値ではあるが，この比は FEM の計算後に得られる  $k$  を用いている．そこで FEM 計算の前にあらかじめ  $c_c$  を推測する手法を考える．

### 5. 臨界減衰係数による $C$ の決定

式 (24) を FEM 問題にあてはめた場合， $m$ ， $k$  は， $[M]$ ， $[K]$  の行列が対応する．これらが対角行列ならば式 (22) と同等である．しかし FEM では， $[K]$  は対角行列でなく，また横荷重と縦荷重の違いで  $c_c$  が変化する．そこで式 (24) を

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega$$

と変形することを考える． $\omega$  は固有角振動数であり， $\omega = \sqrt{k/m}$  である．

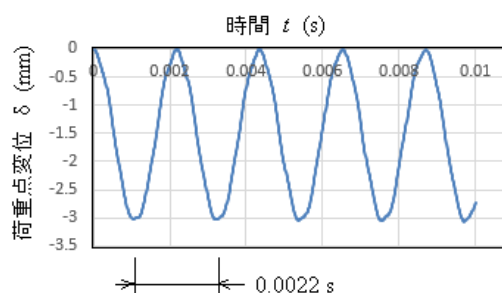
FEM にこれに対応させると，

$$[C]_c = 2[M]\omega \quad (26)$$

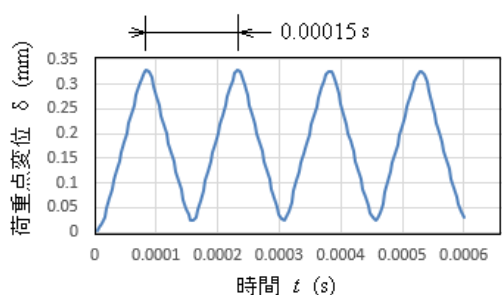
となる． $[M]$  は質量の対角行列， $[C]_c$  も対角行列であるから，

$$C_i = 2M_i\omega \quad (27)$$

と， $i$  行目の成分のみで記述できる．



(a) 横荷重



(b) 縦荷重

図-8  $c=0$  の荷重点変位の時間変化 (振動)

この  $\omega$  は粘性密度  $c = 0$  としたときの，振動状態を観察することによって見つけた．Fig.8 に横荷重，縦荷重の場合の粘性密度をゼロとした場合の FEM 計算結果を示す．粘性がゼロであるため，振動が続く解になっている．前章で述べたように，つり合い解が，横荷重では  $-1.5485\text{mm}$ ，縦荷重では  $0.1761\text{mm}$  (Table2 参照) であるため，そのつり合い位置を中心にし，それらを振幅として振動していることがわかる．

このグラフから，周期  $T$  を読み取る，読み取りには多少の誤差を含むが，図中に示したように

$$\begin{aligned} \text{横荷重の場合 } T &= 0.0022 \text{ (s)} \\ \text{縦荷重の場合 } T &= 0.00015 \text{ (s)} \end{aligned} \quad (28)$$

となった．この  $T$  を用いて，固有角振動数  $\omega$  を次式で計算する．

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (29)$$

このようにして  $T$  から決定した  $\omega$  を用いて，式 (26) によって粘性減衰係数の対角行列  $[C]$  を与え，FEM 計算を行った．そして，つり合い解に達するまでに計算回数  $N$  を調べた．

表-3  $T$  で与えた場合の計算回数

	計算回数 $N$	粘性密度 $c$ への換算
横荷重	26,996	0.0447
縦荷重	2,261	0.656

Table3 に示すように，横荷重の場合は  $N = 26,996$  でつり合い解に達した．式 (26) の粘性減衰係数を粘性密度 (単位体積あたりの量)  $c$  に換算すると， $c = 0.0477$  となった．これは試行錯誤の計算で探し出した最小値， $c = 0.045$  のときの  $N = 28,643$  とほぼ一致する．

縦荷重の場合は  $N = 2,261$  でつり合い解に達した．粘性密度  $c$  に換算すると， $c = 0.656$  であった．これも試行錯誤の計算で探し出した最小値， $c = 0.65$  のときの  $N = 2,430$  とほぼ一致する．

ちなみにこの問題においては，周期  $T$  は理論解が存在する．

$$\text{横荷重の場合 } T = \frac{2}{0.356} \frac{l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$$

$$\text{縦荷重の場合 } T = 4l \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

この式を用いて， $T$  を計算すると，グラフから読み取った値とほぼ一致する．変位  $\delta$  はせん断ロッキングなどで FEM と理論値は異なるが，周期  $T$  は FEM と理論値はほぼ一致するようである．

実際の境界条件が複雑な問題ではこのような理論値が存在しないため，粘性ゼロの振動計算を行い，そのグラフから  $T$  を定めるのが実用的と思われる．

### 6. 横荷重と縦荷重が同時にかかる場合

#### (1) 粘性密度 $c$ を変化させた場合の $N$

複雑な境界条件を考える第一歩として，前述の横荷重と縦荷重が，同時に両方作用した場合を考えた．すなわち，Fig.1 において横荷重 100 N，縦荷重 4000N を同時に作用させた．

FEM つり合い解は，横荷重単独の場合の解と，縦荷重単独の場合の解を足し合わせた解が得られた．計算対象は線形弾性体であるから，重ね合わせの原理が成立することが確認される．



まず粘性密度  $c$  をいろいろと変化させて、つり合いに達する計算回数  $N$  を調べた。その結果、横荷重単独のグラフ (Fig.3) に近い結果となった。横荷重単独の場合は縦荷重単独の場合と比べて粘性密度が1桁小さいため、その小さい  $c$  が支配的になったものと考えられる。 $c = 0.045$  のとき、 $N = 30,381$  と最も小さくなった。

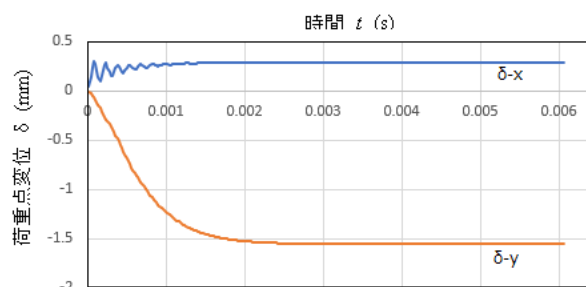


図-9  $c=0.045$  の右端の隅上部の変位の時間経過

Fig.9 に、 $c = 0.045$  の場合の時間と変位のグラフを示す。図中の変位 ( $\delta_x, \delta_y$ ) はモデルの右端の上隅部の値である。この最後の段階ではつりあい解に達しており、その値は

$$(\delta_x, \delta_y) = (0.2918, -1.5523) \quad (30)$$

であった。この値は、Table2 に示した、横荷重、縦荷重が単独に作用した場合の、 $x, y$  成分を足し合わせたものと等しい値である。線形弾性体であるから重ね合わせの原理が成立している。

図から、 $\delta_x$  は振動しながら、 $\delta_y$  は振動せずにつり合い解に達していることがわかる。

## (2) $T$ より臨界減衰係数を算出した場合

粘性密度  $c = 0$  とおき、粘性のない状態で振動させて、周期  $T$  を読み取る。Fig.10 に、 $c = 0$  の場合の変位 ( $\delta_x, \delta_y$ ) の時間変化を示す。

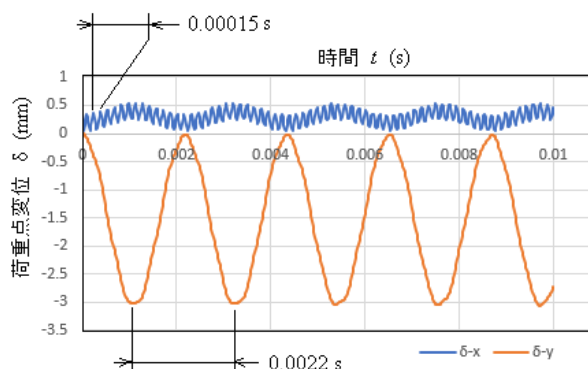


図-10  $C=0$  の荷重点変位の時間変化 (振動)

$x$  方向変位  $\delta_x$  は小さく振動し、 $y$  方向変位  $\delta_y$  は大きく振動している。このグラフから周期  $T$  を読み取り、図中に示す。Fig.8 の場合の式 (28) と同じく、 $T = 0.0022$  s

と  $T = 0.00015$  s あった。従って振動状態についても重ね合わせの原理が成立している。すなわち、 $x$  方向と  $y$  方向は独立に振動しており、それらを単独で計算した場合と同じであることがわかる。

この  $T$  から  $\omega$  を計算し、式 (26) によって粘性減衰係数の対角行列  $[C]$  を与え、FEM 計算を行った。

Table4 に示すように、 $T = 0.0022$  の場合は  $N = 30,388$  でつり合い解に達した。

一方、 $T = 0.002015$  で計算してみると、 $N = 728,786$  とつり合い解に達するまでに多くの計算が必要である。

粘性密度  $c$  に換算すると、 $c = 0.0477$ 、 $c = 0.656$  であり、これは  $T$  が同じであるから Table3 と同じである。前者は試行錯誤の計算で探し出した最小値、 $c = 0.045$  のときの  $N = 30,381$  とほぼ一致する。

後者の  $c = 0.656$  の場合は、 $N$  は約 72 万回と、計算回数が大きすぎるため、つり合い解に収束はするが実用的でないと言える。

以上から、 $T$  が複数ある場合、一番大きい  $T$  によって粘性密度  $c$  を推測することがよいと考えることができる。

表-4  $T$  で与えた場合の計算回数

	計算回数 $N$	粘性密度 $c$ への換算
$T=0.0022$	30,388	0.0447
$T=0.00015$	728,786	0.656

## 7. おわりに

動的陽解法 FEM に粘性項を導入し、振動する解を静止するまで計算することによって、完全に静的な解を得ることができる。細長い棒 (はり) のモデルを作成し、横荷重問題と縦荷重問題を計算した。あらかじめ粘性ゼロの振動計算を行い、その結果から周期を読み取れば、臨界減衰係数を求めることができ、つりあい解に早く到達できる。

## 参考文献

- [1] 日本塑性加工学会編: 非線形有限要素法, コロナ社, pp.105-126, 1994.
- [2] 沖田淳也, 真鍋圭司, 上田完次: 動的陽解法弾塑性 FEM による三次元切削過程のシミュレーション, 精密工学会誌 Vol.66, No.3, pp.429-433, 2000.
- [3] 沖田淳也, 真鍋圭司, 上田完次: 溝型チップブレイカ工具による切削過程の三次元有限要素法解析, 精密工学会誌 Vol.66, No.9, pp.1451-1455, 2000.
- [4] 田中忠次, 川本治: 地盤・斜面崩壊の三次元有限要素解析—動的緩和法の適用—, 農業土木学会論文集 131 号, pp.79-86, 1987.
- [5] 里優, 動的緩和法による静的解析, 地震化学研究所, <https://geolab.jp/column/2016/04/explicit-method-004.php>, 2016.