計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

Timoshenko梁要素の動的問題への分離型時間積分の適用

Application of Splitting Time Integrator to Dynamic Problem of Timoshenko Beam Element

芳谷和哉[1)]，山田貴博[2)]

Kazuya YOSHIYA and Takahiro YAMADA

1) 横浜国立大学　環境情報学府情報環境専攻　（〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台79-7, E-mail: yoshiya-kazuya-zg@ynu.jp）

2) 学博 横浜国立大学 環境情報研究院 教授（〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp）

In this paper, we propose the approach to relax restriction of time step in explicit time integrator for dynamic problems of Timoshenko beam. The mixed finite element method, in which the transverse shear force is introduced as an independent variable, is adopted and the splitting time integrator proposed by the author is applied. This integrator is obtained by extending the Rattle method can be used for constrained problems and apply this integrator to dynamic problems of Timoshenko beam. In the proposed procedure, bending deformation is treated as an explicit method and shear deformation is treated as an implicit method.

Key Words : *Timoshenko beam, mixed finite element, numerical time integrator*

1.　緒言

一般に有限要素法で広く用いられている梁要素には，Bernoulli-Euler梁要素とTimoshenko梁要素がある．これら２つの要素では，空間離散化された構造物の横振動現象を陽的時間積分法で解く場合，時間刻みの数値安定性に異なる性質が現れる．Bernoulli-Euler梁は，数値安定性の条件が曲げ変形の最大固有角振動数によって決定される．これに対し，Timoshenko梁では，曲げ変形に加えせん断変形を考慮することから，数値安定性は曲げ変形の最大固有角振動数ではなく，せん断変形に起因する最大固有角振動数で決定される可能性がある．この状況は，せん断波の波動伝播速度で定められるクーラン数の条件が数値安定性を支配することになり，曲げ変形から導かれる数値安定性の条件より強い時間刻みの制約となることが多い．

筆者等は，微圧縮弾性体の動的問題やケーブル構造物の動的大変形問題に対して，拘束条件付き問題に対する時間積分であるRattle法を拡張した混合型定式化に基づく時間積分法を提案した [1,2]．この方法では，混合型定式化により独立変数として導入した変数について陰的な取り扱いを行うことで，時間刻みの制約が厳しい変形モードを陰解法，それ以外を陽解法として取り扱うとなる時間積分法が得られる．

そこで本研究では，Timoshenko梁において，せん断力を独立変数とする混合型有限要素法を採用し，分離型時間積分を動的問題に適用する．これにより，せん断変形に対して陰的時間積分，曲げ変形に対して陽的時間積分となる手法が得られ，Timoshenko梁の動的問題における時間刻みの制約を緩和することが可能となる．また，本研究では，数値計算例によりその数値安定性を確認する．

2.　支配方程式

本研究では，Timoshenko梁の横振動の自由振動問題を考える．はじめに，Timoshenko梁に時刻 t に依存する変位として，たわみ w と回転角 θ を定義する．この時，運動方程式は次式で与えられる．

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa AG\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)\right\},\qquad \rho I\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}=EI\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\kappa AG\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right) \tag{1}$$

ここで，ρ は密度，A は断面積，I は断面二次モーメント，E は縦弾性係数， κ はせん断補正係数， G はせん断弾性係数である．

いま，せん断力 Q を独立変数とし，たわみ w と回転角 θとの関係を表す次の構成則を新たな支配方程式とする．

$$Q=\kappa GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right) \tag{2}$$

さらに，せん断剛性が無限大となる($\kappa GA\to\infty$)ことを考え，せん断力 Q をLagrange未定乗数と解釈すれば，Bernoulli-Euler梁に対する混合型の定式化が次式のように得られる．

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=EI\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+Q,\qquad \frac{\partial w}{\partial x}-\theta=0 \tag{3}$$

3.　時間方向離散化

(1) Verlet法

Timoshenko梁の動的問題における陽的時間積分を考える．変位のみで記述される支配方程式の式(1)に対して，時間方向の中心差分法と等価な１段階法であるVerlet法[3]を適用し，独立変数として変位 w,θ と速度 $\dot{w},\dot{\theta}$ を定義すると，次の半離散化方程式が得られる．

$$\frac{1}{\Delta t}(w^{n+1} - w^n) = \dot{w}^{n+\frac{1}{2}} \tag{4}$$

$$\frac{1}{\Delta t}(\theta^{n+1} - \theta^n) = \dot{\theta}^{n+\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{w}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{w}^n\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa G\left(\frac{\partial w^n}{\partial x} - \theta^n\right)\right\} \tag{6}$$

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{\theta}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{\theta}^n\right) = E\frac{\partial^2\theta^n}{\partial x^2} + \frac{\kappa AG}{I}\left(\frac{\partial w^n}{\partial x} - \theta^n\right) \tag{7}$$

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{w}^{n+1} - \dot{w}^{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa G\left(\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} - \theta^{n+1}\right)\right\} \tag{8}$$

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{\theta}^{n+1} - \dot{\theta}^{n+\frac{1}{2}}\right) = E\frac{\partial^2\theta^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\kappa AG}{I}\left(\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} - \theta^{n+1}\right) \tag{9}$$

ここで， $w^n, \dot{w}^n$ は時刻 t_n に対応する n ステップの変位，速度の近似値であり， $\dot{w}^{n+\frac{1}{2}}$ は n ステップと $n+1$ ステップの中間時刻における速度である．回転角 θ についても同様であり，また $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ は時間刻みである．Verlet法は条件付き安定な陽的時間積分法であり，弾性体の波動を取り扱う場合には，その数値安定性は弾性波速度によって表されるクーラン(Courant)数で決定される．

(2) Rattle法

拘束条件付き問題に対する時間積分法では，拘束条件とは独立に時間刻みを決定することができる．そこで本研究では，Timoshenko梁の運動において，曲げ変形による運動が系の主要な力の寄与であり，せん断変形による運動が系の摂動であると考える．拘束条件付き問題に対する時間積分を拡張することでせん断変形による運動を摂動項によって副次的に式(3)に寄与し，Timoshenko梁に対する時間積分を導出する．

Bernoulli-Euler梁の運動を示す式(3)の拘束条件付き問題に対する時間積分法として，分子動力学で用いられているRattle法により時間方向を離散化する[4]．Rattle法はVerlet法から導かれた２次精度の手法であり，式(3)に適用すると以下の２ステージのアルゴリズムが得られる．

[ステージ１]

$$\frac{1}{\Delta t}(w^{n+1} - w^n) = \dot{w}^{n+\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$\frac{1}{\Delta t}(\theta^{n+1} - \theta^n) = \dot{\theta}^{n+\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{w}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{w}^n\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial Q^n}{\partial x} \tag{12}$$

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{\theta}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{\theta}^n\right) = E\frac{\partial^2\theta^n}{\partial x^2} + \frac{Q^n}{I} \tag{13}$$

$$\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} - \theta^{n+1} = 0 \tag{14}$$

[ステージ２]

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{w}^{n+1} - \dot{w}^{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial Q^{n+1}}{\partial x} \tag{15}$$

$$\frac{2\rho}{\Delta t}\left(\dot{\theta}^{n+1} - \dot{\theta}^{n+\frac{1}{2}}\right) = E\frac{\partial^2\theta^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{Q^{n+1}}{I} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \dot{w}^{n+1}}{\partial x} - \dot{\theta}^{n+1} = 0 \tag{17}$$

ステージ１では，$n+1$ ステップにおける変位に対して拘束条件を課し，ステージ２では $n+1$ ステップにおける速度に対して拘束条件を課すものとなっている．

(3) 分離型時間積分

Timoshenko梁に対して，Bernoulli-Euler梁の仮定を満たすようにRattle法によって半離散化された上述の式を，摂動系であるTimoshenko梁に拡張することで分離型時間積分を適用する．式(2)に基づき，式(14)および式(17)の拘束条件式をせん断変形に関する構成則に置き換える．式(14)は式(18)に，式(17)は式(19)のように置き換わり，Rattle法は以下のように拡張できる．

[ステージ１]

$$Q^n = \kappa GA\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} - \theta^{n+1}\right) + \left(\frac{\partial w^n}{\partial x} - \theta^n\right)\right\} - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial \dot{w}^n}{\partial x} - \dot{\theta}^n\right)\right] \tag{18}$$

[ステージ２]

$$Q^{n+1} = \kappa GA\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} - \theta^{n+1}\right) + \left(\frac{\partial w^n}{\partial x} - \theta^n\right)\right\} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial \dot{w}^{n+1}}{\partial x} - \dot{\theta}^{n+1}\right)\right] \tag{19}$$

ここで，ステージ１におけるせん断力は w^{n+1} および θ^{n+1} を含み n ステップにおける近似を構成するものとする．また大域的にRattle法の２次精度を保つように，中心差分法に基づいて式(18)を定めている．同様に，ステージ２におけるせん断力は $\dot{w}^{n+1}, \dot{\theta}^{n+1}$ を含み， $n+1$ ステップにおける値となるものとして式(19)を定めている．

4. 空間方向離散化

分離型時間積分を適用して得られた上述の半離散化方程式において，変位，速度，せん断力を独立な変数として重み付き残差法に基づき離散化する．重み付き残差法では，重み関数として仮想変位 $\delta w, \delta\theta, \delta Q$ を各式の両辺に乗じて，要素内の体積領域 V で積分することで離散化を行う．

空間離散化に対しては，混合型有限要素近似を採用する．従来から知られるTimoshenko梁要素の有限要素近似と同様に，たわみ w と回転角 θ を独立な変数と考え，一次要素の形状関数を定義し離散化する[5]．また，せん断力 Q については要素内で一定とする．

有限要素離散化を行うと，上述の半離散化方程式は全離散化方程式となり，代数方程式で記述される．これにより，得られる全離散化方程式は，曲げ変形を担う自由度である w および θ については陽解法，せん断変形を担う自由度である Q については陰解法によって求解される．また要素内で Q を一定とする本研究の混合型有限要素近似は，せん断剛性について，次数低減積分を用いてせん断ロッキングを回避する形で導出されるTimoshenko梁要素の離散化と等価である．

しかしながら，本研究の定式化では，陽解法で求解される自由度についても連立一次方程式の求解が必要であり，陽解法の利点を失う．この問題点は，分離型時間積分法の定式化手順に基づき，形状関数から得られる整合質量行列を対角化した集中化質量行列に置き換えることで，回避することが可能である．しかし，回転自由度が含まれる梁要素の質量行列を対角化するのは容易ではないことが知られており[6]，今後検討する必要がある．

5. 数値計算

(1) 検証問題と数値安定性

矩形断面の片持ち梁の自由振動を検証問題（図-1参照）として設定し，初期変位を与えて振動を解析する．長さ $L = 100[mm]$，幅 $b = 10[mm]$ のアルミ材 $E = 70.3[GPa]$，$G = 26.1[GPa]$ を持つ梁を設定する．この問題では厳密解を得ることが可能なため，求解した値の妥当性を確認することができる．

梁の横振動における波動伝播速度は，Bernoulli-Euler梁は式(20)で決定され，Timoshenko梁は式(21)で決定される．

$$c_B = \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{\omega} \tag{20}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{21}$$

ここで，ω は固有角振動数であり，陽解法の安定条件に関わる c_B が最大値となる場合の固有角振動数は，有限要素離散化後の固有値解析によって得られる最高次の固有角振動数によって決まる．さらに，時間刻みの制約は次式に示すクーランの条件によって定まる．

$$\Delta t \leq \alpha \frac{l}{c} \tag{22}$$

ここで，c は応力伝播速度，l は梁要素の長さ，α は安定性係数であり，$0.0 < \alpha < 1.0$ である．式(20)〜(22)より，Bernoulli-Euler梁は曲げ剛性が支配的ではない場合，時間刻みの制約が弱まり，Timoshenko梁は，曲げ剛性に関わらず，常に時間刻みの制約が一定であると言える．

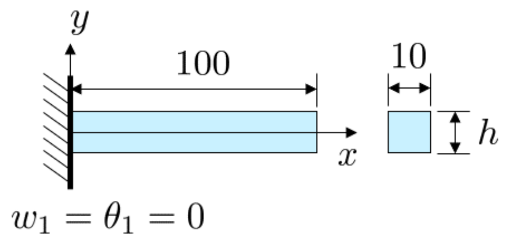

図-1 片持ち梁の振動問題

(2) 比較対象

Timoshenko梁に対する分離型時間積分の数値特性を評価するため，一般的に広く用いられている梁要素の離散化手法と比較する．本研究では，有限要素法における形状関数に３次エルミート関数を設定して得られるBernoulli-Euler梁要素，次数低減積分により定式化されるTimoshenko梁要素[7]をVerlet法により求解する手法を比較対象とする．またこのとき，求解に必要となる質量行列は，形状関数から得られる整合質量行列を用いる．

(3) 数値安定性評価

検証問題(図-1参照)において，本研究で定式化したTimoshenko梁要素を分離型時間積分により求解する手法，前章で比較対象として定義したBernoulli-Euler梁要素およびTimoshenko梁要素をVerlet法により求解する手法で解析した際の時間刻みの数値安定性を図-2に示す．いずれも要素数10で固定し，梁の高さ h を0.01~50$[mm]$の範囲で少しずつ変化させ解析した．Timoshenko梁では梁の長さを固定した状態で h が小さくなると，曲げ剛性に対してせん断剛性が卓越するため，図-2の横軸は曲げ剛性に対するせん断剛性の比率としての意味を持っている．解析において100ステップ後の振幅が拡大したものを解の発散とみなし，解が発散する時間刻みの範囲における下限の値をプロットしている．

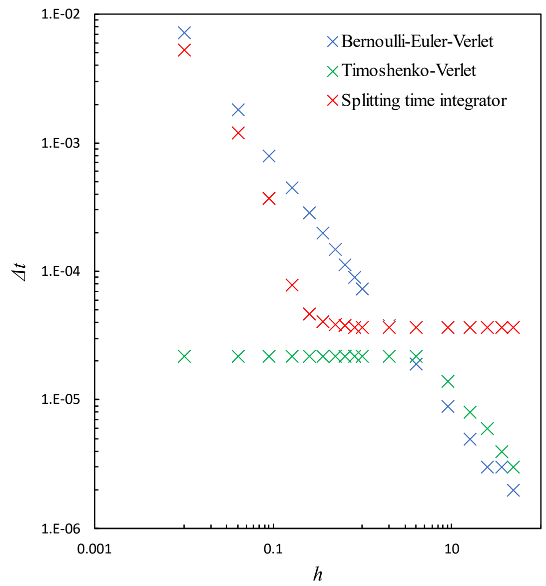

図-2 時間刻みの数値安定性

図-2において, せん断剛性が曲げ剛性に対して卓越する場合，分離型時間積分は，式(20)によって決定されるBernoulli-Euler梁要素をVerlet法で求解する手法の数値安定性と同様の傾向を示している. したがって, 応力伝播速度が式(21)のせん断波速度に依存していないことがわかる. また, 次数低減積分から得られるTimoshenko梁要素をVerlet法で求解する手法の数値安定性と比較すると，せん断剛性が卓越するにしたがって, 顕著な差が現れ, 本研究の手法は大幅に時間刻みを大きく取ることが可能であるといえる.

（4）数値計算例

図-2に示した分離型時間積分の数値安定性が, クーラン数の観点でせん断波速度に依存していないことを確認する．計算条件は，図-1の梁において $h = 0.1$，要素数10とし，材料定数は図-2と同様のアルミ材の材料定数とする．本研究の手法を用いて，せん断波速度から決定されるクーラン数 $C = 0.328$ となる時の梁の右端の点での変位の時刻歴を図-3に示す. 次数低減積分から得られる梁要素をVerlet法により求解する場合，この問題のクーラン数は C =0.207 以下で安定となるのに対し，図-3では長い時間の解析で安定解析を示している．しかしながら，$C =$ 0.339 以上では解が発散することを確認しており, クーラン数が式(20)の曲げ波速度から決定されているとすると, 本来クーラン数は, さらに大きい数値になるため, 疑問が残る解析結果を示している．またポアソン比 ν を変更すると, 次数低減積分から得られる梁要素では式(21)に基づきクーラン数が変更されるのに対し，分離型時間積分ではクーラン数が変わらないことを確認しており，現時点では曲げ波速度とせん断波速度のどちらからもクーラン数が決定していないような数値特性を示しており，今後検討が必要である.

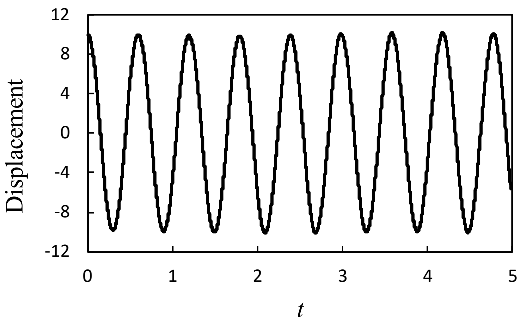

図-3 変位の時刻歴（C＝0.328）

6. 結言

本研究では，Timoshenko梁において，Bernoulli-Eulerの仮定を拘束条件とし, せん断力をLagrange未定乗数とする混合型有限要素法を採用し，分離型時間積分をTimoshenko梁の動的問題に適用した. これにより, せん断変形に対して陰的時間積分法，曲げ変形に対して陽的時間積分法となる手法が得られ，通常の有限要素離散化によって得られるTimoshenko梁要素の動的問題を陽解法で解く場合と比較して，大幅に時間刻みの制約を緩和できることを確認した.

しかしながら, 本研究の定式化では, 分離型時間積分の陽解法による求解部分において，連立一次方程式を解く必要がある点を今後の改善点として考慮する必要があり, またクーラン数の決定に関わる要因の不明確さから定式化そのものを改善する必要があるといえる.

参考文献

[1] 山田貴博: 微圧縮弾性体の動的問題に対する分離型時間積分，土木学会論文集A2（応用力学），Vol.77(2), pp.I_217-I_225, 2021.

[2] 池田貴和子, 山田貴博: ケーブルに対する混合型変分原理に基づく数値時間積分法，計算工学講演会論文集，Vol.6(1), pp.71-74, 2001.

[3] 土木学会応用力学委員会計算力学小委員会編: いまさら聞けない計算力学の常識，丸善，2008.

[4] Andersen, H.C.: Rattle: A “velocity” version of the shake algorithm for molecular dynamics calculations. *J. Comput. Phys.*, Vol.52, pp.24-34, 1983.

[5] 山田貴博: 高性能有限要素法，丸善，2007.

[6] Zhanxuan, Z. et al.: Optimal Lumped Mass Matrices by Minimization of Modal Errors for Beam Elements, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.136(2): 021015, 2014.

[7] Thomas, J. R. Hugues. et al.: A simple and efficient finite element for plate bending. *International journal for numerical method in engineering*, Vol.11(10), pp.1529-1543, 1977.