

離散Helmholtz分解に基づく Locking-free有限要素法

Locking-free finite element method based on discrete Helmholtz decomposition

今村純也¹⁾

Junya Imamura

1) 博(工) imi計算工学研究室 (〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp)

In a previous paper, I have proposed a generalized force method (GFM), in which the simultaneous equation is constructed novel reduction method for the treatment of the continua. This report is part of research regarding Helmholtz theorem, to apply the Helmholtz decomposition ($H-d$) to the finite element method. $H-d$ is, however, in a certain coordinate expression. I proposed an improved $H-d$ expression called dHd . The dHd includes $H-d$ and other coordinate expressions. That is a multidirectional FEM concept. The objective of this report is to let include Cauchy-Riemann equations into the scheme for prevention of digit loss. The dHd is by nature developed for the objective. Cauchy-Riemann equations are for 2D originally, however, I proposed the scheme to 3D.

Key Words : Locking-free finite element method, Discrete Helmholtz decomposition, Helmholtz theorem, Coulomb gauge, Particle-mesh method.

1. 目的と概要

Helmholtz分解の視点では、MAC(Marker And Cell)法は圧力ポテンシャルを介してCoulombゲージを満たして行くスキームであり、質量保存則を満たす。

Helmholtzの定理は、スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル ψ を用い、Coulombゲージ ($\operatorname{div}\psi = 0$) の下で、任意のベクトル場 \mathbf{V} をLateral(縦)成分とTransverse(横)成分に分解表示する。[1]

既報でLocking-free有限要素法を提唱した。要素関数は完全 n 次関数で表すべし、とするものである。[2]

不完全 n 次関数の典型例が双1次要素である。いわゆるアワーグラスモードが生じる。

完全 2 次関数とすれば、 $\nabla^2\mathbf{u}$ も組み込め、 $\nabla\mathbf{u}$ 計算にも 2 次項のパラメータを反映させ得る。

$\nabla^2\mathbf{u}$ は運動量分布に、分布反力として対抗する。それを、方向性を問わず、ひずみエネルギーにも反映させ得る、とするものである。

上述はサブ・パラメトリック化法であり、完全 n 次化には、スーパー・パラメトリック化も考えられる。

新たに D_{4xy} 項を加え、ゆがみ項 C_{4xy} を、パラメータ D_4 の自由度で最小化し、数値的に完全1次関数(並1次関数)とする方法である。

数値Lockingの原因は2つ在る。上述の不完全 n 次関数の適用が原因の他、いまひとつはCauchy-Riemann(C.-R.)の関係式を無視することが原因で起る。

後者は2D式であるが、後述するが、共役変数の概念で鏡像計算して行くことで、3Dでも満たして行ける。

極近時、前者は不完全 n 次関数を、完全 n 次関数とするためパラメータを加えるが、その追加パラメータの自

由度で、後者 : C.-R.関係式も同時に、満たせることが解って来た。

したがって矩形・六面体要素は、完全 n 次関数とすることで、いずれのLocking原因も排除可能、である。

$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ は Coulombゲージの勾配式である。代数的に満たせばCauchyの応力式も回転式も、同時に満たす。

本稿では、数値的に満たして行くスキームを提示する。

本OSには別報2稿も提示している。ひとつは応力法に関する。いま一つは変位と応力の混合変分法に関する。

応力の連続性、つまり応力パラメータによる変分が重要なのは、剛性の大きく異なる要素間である。

本稿を含めて、いずれもその課題の解決法を論じている。剛性の均一な単相では、変位法で、かつ多少のLockingは許容する計算法で、十分な実績もある。

2. 方 法

(1) 数値Locking 対策

数値Lockingの1つは上述のように、不完全 n 次関数要素で表れる。

双1次の正方形要素は、 45° 回転した菱形では、 x^2 項、 y^2 項を必要とし、自由な座標回転形を許容するには完全2次関数を必要とする。

そこで双1次形状要素の、菱型への回転を典型例として、対策を説明する。

もう一つの数値Lockingの原因対策のC.-R.の関係式は、一般化して、共役変数の概念で説明している。 $(A + B)$ と $(A - B)$ の変数の対を、互いに共役(輻)変数と呼んでいる。

応力式をそれぞれの共役変数で表して、2つの方程式を同時に解いて行けば回避できる。

せん断ひずみと渦度(剛体回転)が、共役変数の典型例

であり、C.-R.の横成分式は“せん断ひずみ=0”の式である。

縦成分の共役変数は、2つの法線ひずみの“和と差”で表される。

縦成分のC.-R.の関係式は“差”的共役変数をゼロとする式である。有限要素法では弱形式で満たす。

“法線ひずみの差”は45°回転座標系のせん断ひずみ(×2)に等しい。

したがってC.-R.の関係式は、デカルト座標系と、45°座標回転系の、いずれもせん断ひずみを最小化(最小2乗)することで、数値的に満たせる。

共役変数の概念では、せん断ひずみの仮想仕事(エネルギー)計算に際しては、剛体回転(渦度)を最小化する。

(2) 離散Helmholtz分解(dHd)

本稿は“Helmholtz分解($H-d$)に基づく連続体理論の、有限要素法への適用に関する研究”的一環であり、 $H-d$ を修正した表示法を“離散Helmholtz分解(dHd)”と呼んで提示している。([付録1] 参照のこと。)

Helmholtzの定理で重要な点は“任意のベクトル場 \mathbf{V} を分解表示する”点であり、 dHd でも同様である。

つまり、変位ベクトル場もひずみベクトル場も、更にはポテンシャルベクトル場も分解表示する。

変位ベクトル場 $\mathbf{u} =$ ポテンシャル $\{\varphi, \Psi\}$ で表し、ひずみベクトル場 $\mathbf{V} =$ ポテンシャル $\{\Phi, \Psi\}$ で表す、とする。

更に、ポテンシャルベクトル場 $\psi =$ ポテンシャル $\{v, \lambda\}$ で表す、とする。

$H-d$ は、ひずみベクトル場 \mathbf{V} を、Coulombゲージを制約条件として、式(1)で分解表示する。

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \operatorname{curl}\Psi \quad (\operatorname{div}\Psi = 0) \quad (1)$$

式(1)を、 $\mathbf{V} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{curl}\Psi$ や、 $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$ で表示しなかったのは“意図がある”からである。

すなわち、 $H-d$ を修正して発展表示するためである。その発展形が dHd である。

dHd は、式(1)のひずみベクトル場 \mathbf{V} の分解を、式(2)で表示する。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (\nabla\Phi + \nabla\Phi^c) \\ &+ offd\Psi \quad (\operatorname{div}\Psi = 0, \nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi) \end{aligned} \quad (2)$$

$\nabla\Phi$ は縦成分の内の、非圧縮成分であり、 $\nabla\Phi^c$ は圧縮・膨張成分である。

式(2)の新しい演算子は、式(3)のように定義している。縦成分は新しいベクトル記号で、横成分は演算子で表している。(前者も演算子と呼ぶ。)

$$\left. \begin{aligned} \nabla\Psi &= [\nabla_{diag}\Psi, \nabla_{offd}\Psi] \\ \nabla^1\Psi &= \nabla_{diag}\Psi + offd\Psi \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$$\text{where } \nabla^1\Psi \equiv \nabla\Psi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, offd\Psi \equiv \nabla_{offd}\Psi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\nabla^1\Psi$ は、総和規約に従う表示 $\partial\Psi_i/\partial x_j$ を表す。

$\nabla^1\Psi \equiv \nabla\Psi \cdot \{1, 1, 1\}^T$, $\nabla^1\Phi \equiv \nabla\Phi \cdot \{1, 1, 1\}^T$ である。

非圧縮の分解式は式(4)となる。

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + offd\Psi \quad (\operatorname{div}\Psi = 0, \nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi) \quad (4)$$

(2) 共役変数の概念

dHd では、 $\nabla^1\Psi$ の横成分(非対角成分)を $offd\Psi$ で表す他、 $\operatorname{curl}\Psi$ でも表し、せん断形を $shr\Psi$ で表すなど、(A+B)と(A-B)の共役変数の概念で、 $\nabla\Psi$ の2成分のほぼすべての組み合わせを、新しい演算子を定義して表し、計算していく。

基本的に、 $\nabla\Psi$ の自由度数(成分数)の組み合わせを、力学的に意味付けて、演算子で表示するものである。

もう少し詳細は後述するが、C.-R.の関係式を数値的に満たすなど、桁落ち排除が目的である。

なお、Coulombゲージが代数的に満たされれば、 dHd は $H-d$ に等しい。(不可能なので離散計算する。)

(3) 粒子-メッシュ法

本稿は、“粒子・メッシュ”法を前提として述べる。[3][4] すなわち、従来型の粒子法が得意とするメッシュフリー法ではない。[†]

(4) 流線上粒子の流通座標と回転

粒子の Φ は流線上に在る。([付録2] 参照のこと。)

Φ は流通座標で表し、流線(Lagrange)座標上の粒子変位は、 $\Phi\nabla\Phi$ で流通座標表示される。

粒子-メッシュ法では、流線群の流通座標表示となる。流線群は、有限要素関数で補間して連続表示する。

流線の接線方向、および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を、流線座標(Lagrange座標)と呼び、横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力としても表れる。

それらを流通座標(デカルト座標)表示するものである。

ただ、粒子の自転は接線軸周りのみではなく、他の軸周りもある。そこで $\operatorname{curl}\Psi$ も流通座標で表す。

したがって $\Delta\Phi\nabla\Phi$ は $= \mathbf{u}$ であり、 $\Delta\Phi\nabla^1\Phi$ は体積変化であるが、 Φ は非圧縮を表すとしたので $\Delta\Phi\nabla^1\Phi = 0$ である。

[†] メッシュフリー法でも、当該粒子は $\{\varphi\}_{particle} = 0$ とし、勾配パラメータ $\{\nabla\varphi\}_{particle}$ を、周囲の粒子との間で回帰計算して行く、ことで適用できる。

非圧縮・圧縮に拘わらず Φ 計算は必須であり、圧縮成分は Φ^c で表し、 Φ を加えた ($\Phi^c + \Phi$) で計算して行く。

dHd では $\langle \nabla_{diag} \Psi = \nabla \Phi \rangle$ なので、 $\mathbf{u} = \Delta \Phi \nabla_{diag} \Psi$ であり、 $\Phi^2 = \Psi^2$ ($\equiv \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2$) である。

$\Delta \Phi \partial \Psi_i / \partial x_j$ の $\Delta \Phi \partial \Psi_i / \partial x_i$ 項が縦成分であり、他の項が横成分である。

粒子自身は $\text{curl} \Psi$ 分自転する。正確には $\text{shr} \Psi$ 分小さく公転しながら自転する。

添え字を $(i = 1, 2, 3), (i+1 = 2, 3, 1), (i-1 = 3, 1, 2)$ で表すとし、せん断ひずみは $\langle \partial \Psi_i / \partial x_{i+1} + \partial \Psi_{i+1} / \partial x_i \rangle$ で、渦度は $\langle \partial \Psi_i / \partial x_{i+1} - \partial \Psi_{i+1} / \partial x_i \rangle$ で表す。

Lagrange座標表示のそれらを、流通座標表示するには $\Delta \Phi \partial \Psi_i / \partial x_j$ を更に分解し、 $\Delta \Psi_j \partial \Psi_i / \partial x_j$ で表して行く。

つまり $\Delta \Psi_i \partial \Psi_i / \partial x_j$ が縦成分の分解表示であり、小さな公転も含むこととなり、その他の項が粒子の、それぞれの軸周りの自転を表す。

例えとして、地球の公転を $\Delta \Phi \nabla \Phi$ で表せば、地球と共に月も $\Delta \Phi \nabla \Phi$ で移動しながら、地球の周りをせん断ひずみ分、小さく公転し、渦度分自転する、と考える。(非圧縮運動であり、この例では月の裏側は見えない。)

Ψ は、接線・主法線・陪法線方向の変位を表している。それを流通座標表示では $(\Delta \Psi \cdot \nabla) \Psi$ で表すものである。

すなわち、非圧縮の \mathbf{u} は、 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ である。

Lagrange座標の \mathbf{u} は $= \nabla^1 \Psi$ である。(ベクトル場のポテンシャル表示形、ただし、in case ($\text{div} \Psi = 0$)。)

(5) 渦度の表示

上述で、回転 $\text{curl} \Psi$ もデカルト座標で表すとした。

$\text{curl} \Psi_3$ が $x-y$ 鏡面上の、流れ関数表示の渦度である。

ただし、 Ψ_3 は本来3D表示であり、2Dでは z 軸方向は剛体 ($\partial \Psi_3 / \partial z = \partial w^{\#} / \partial z = 0$) であるが、スライスした $x-y$ 鏡面上の像は z 軸方向に、パラパラ漫画の如く変動する。

それを、小さく公転しながら自転する、と表現した。

3Dの $\partial \Psi_3 / \partial z \neq 0$ 分が公転で、 $\langle \partial \Psi_3 / \partial y - \partial \Psi_3 / \partial x \rangle$ 分が自転(渦度)である。

(6) 変位ベクトル場の dHd 表示

念の為、変位ベクトル場 \mathbf{u} の非圧縮 dHd 表示式を式(5)に示して置く。

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \text{off} d\boldsymbol{\psi} \quad (\text{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \nabla_{diag} \boldsymbol{\psi} = \nabla \varphi) \quad (5)$$

(7) dHd 法に基づく体積ひずみ制御

$(\nabla \text{div} \mathbf{u} = \mathbf{0})$ は $\langle \nabla \nabla^1 \Phi = \mathbf{0} \rangle$ で表される。

この式は、縦成分 $\nabla_{diag}^2 \Phi$ 項と横成分項 $\nabla_{offa}^2 \Phi$ 項とで構成されている。(新しい演算子に留意。)

したがって $(\nabla \nabla^1 \Phi = \mathbf{0})$ は、 $\nabla \nabla \Phi$ の対角項(縦成分)を、それぞれの行と列の横成分項に配分して、 $\nabla^2 \Phi = \mathbf{0}$ を得る式と解釈できる。

要するに、 dHd の概念では、 $\nabla^2 \Phi = \mathbf{R}$ の縦成分残差を、横成分へ配分することで、 $\nabla^2 \Phi = \mathbf{0}$ を得る。

そのスキームが確立されれば、 $(\nabla \nabla^1 \Phi = \mathbf{0})$ 式へも適用して、 $\nabla^2 \Phi = \mathbf{0}$ を満たし得る。(或いは、その逆で。)

(8) dHd によるCauchy-Riemannの関係式

ひずみレベルのCoulombゲージ(連続の式: $\text{div} \mathbf{u}$)を、式(6)のように分解して表示する。

$$\left. \begin{aligned} 2\text{div} \mathbf{u} &= (u^{(100)} + v^{(010)}) \\ &\quad + (v^{(010)} + w^{(001)}) + (w^{(001)} + u^{(100)}) \\ 0 &= (u^{(100)} - v^{(010)}) \\ &\quad + (v^{(010)} - w^{(001)}) + (w^{(001)} - u^{(100)}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)の2式の、それぞれ対応する()の共役変数を鏡面像と呼び、段階計算法を鏡像法と呼ぶ。(同時解法も可。)

第2式の第1項がC.-R.の縦成分式であり、第1式の共役変数計算に際し、C.-R.縦成分式残差を最小2乗化する。

せん断ひずみと回転を式(7)のように分解表示し、縦成分式同様に、横成分関係式も満たして行く。

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{sh} \mathbf{u} &= (u^{(010)} + v^{(100)}) \\ &\quad + (v^{(001)} + w^{(010)}) + (w^{(100)} + u^{(001)}) \\ \nabla_{curl} \mathbf{u} &= (u^{(010)} - v^{(100)}) \\ &\quad + (v^{(001)} - w^{(010)}) + (w^{(100)} - u^{(001)}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

共役変数の概念では、C.-R.の横成分式は、回転の方を制約式とすることも可能。

(9) 完全 n 次式化によるC.-R.の関係式対処

3重1次六面体 Φ 要素に、次の係数ベクトルの項:

$$\{\Phi^{(200)}, \Phi^{(020)}, \Phi^{(002)}, \Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$$

を加えて、(略)完全2次関数とする。

対応する新しいパラメータとして、局所原点(重心)に、

$$\{\Phi^{(100)}, \Phi^{(010)}, \Phi^{(001)}, \Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$$

を設定する。

先ず、パラメータ: $\{\Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}\}_0$ の自由度で、要素内せん断ひずみ($\Phi^{(110)}, \Phi^{(011)}, \Phi^{(101)}$)の分布を、それぞれ最小化(最小2乗)する。

同様にして、C.-R.の縦成分式(45° 回転座標系のせん断ひずみ式)を、残りのパラメータ自由度で、

$$(\Phi^{(100)} - \Phi^{(010)}) = 0,$$

$$(\Phi^{(010)} - \Phi^{(001)}) = 0,$$

$$(\Phi^{(001)} - \Phi^{(100)}) = 0$$

の最小2乗式で、数値的に満たして行く。

(10) dHd によるせん断形表示

dHd は横成分を $\text{curl} \Psi$ の他、共役変数のせん断形も表示し、新しい演算子 $\text{shr} \Psi$ で表す。

Helmholtzの定理は、無限遠点の境界条件をゼロとし、境界条件を満たす関数形の $\{\varphi, \psi\}$ で、 $\operatorname{div} \mathbf{u}$ の体積V積分で φ を計算し、同様に $\operatorname{curl} \mathbf{u}$ のV積分で ψ を計算する、としている。

課題は、境界条件を満たす $\{\varphi, \psi\}$ の関数形を見出せるか、である。

dHd は $\nabla\varphi$ でも $\operatorname{sh}\psi$ でも、 $\operatorname{sh}\mathbf{u}$ を表す。したがって、 $\operatorname{sh}\mathbf{u}$ の体積V積分はスカラーとベクトルを同時に表す理屈となり矛盾するので、 $\operatorname{sh}\mathbf{u}$ の体積V積分はできない。

無限遠点で境界条件を満たす $\{\varphi, \psi\}$ の関数形を見出すことに代えて、 $\operatorname{sh}\mathbf{u}$ を表す $\{\nabla\varphi, \operatorname{sh}\psi\}$ で、エネルギー抵抗(拡散)を表せば、 $\{\nabla\varphi, \operatorname{curl} \psi\}$ を表す $\{\varphi, \psi\}$ は減衰して行き、無限遠点で境界条件を満たす。

$\operatorname{sh}\mathbf{u}$ で表す抵抗を最小化することは、C.-R.の関係式を数値的に満たすことでもある。

(11) 回転座標系による Locking-free スキーム

仕事量(エネルギー量)はスカラーなので、デカルト座標系で計算しても、座標回転した系 (s, n, ζ) で計算しても等しい。

“完全 n 次関数を適用すべし”とするLocking-free法の根拠は次の通りである。

先ず、不完全 n 次関数(正方形)要素のノードパラメータはデカルト座標系で表す。

しかし“そのノードパラメータのままで、菱型は表示できない”。

近時、ノードパラメータも菱形に合せ、 45° 回転座標系で表示すれば、解決できることに気付いた。

単位セル(UC)要素のノードパラメータを回転座標系で表し、UC要素内で回転座標角を補間し、 (s, n, ζ) 座標系で仮想仕事式を計算して行く方法である。

上述のように、デカルト座標系のノードパラメータで、菱型要素内の関数はノードパラメータ表示できないが、菱型要素内の関数值は表示できる、ことに留意する。

数値計算スキームは次に示す、簡単な数値計算例で理解されたい。

(12) 菱型要素による片持ちばかり計算

最も簡単なLocking-free問題の数値計算例として、菱型要素の片持ちばかりを採り挙げる。

かつ形状が終始、菱型で変わらない微小変形問題として解く。

1DのLocking問題として、Timoshenkoばかりが広く知られている。Timoshenkoはり理論は、せん断変形を加える解法である。[4]

菱型要素は斜交座標上で解くことでLocking-free化し、せん断変形には共役変数としての剛体変形を加え、後者

を最小化することで、2つ目の原因も排除してLocking-free化する。

メッシュを図-1に示す。

三角形部分にも四辺形要素を適用する。それにより、方法の柔軟性を検証する。

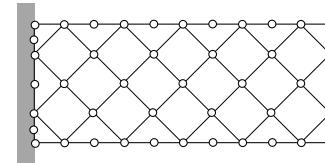


図-1 片持ちばかりのメッシュ

UC要素のノード番号を、図2(a)のように左周りに振る。四辺形要素も左回りに振る。

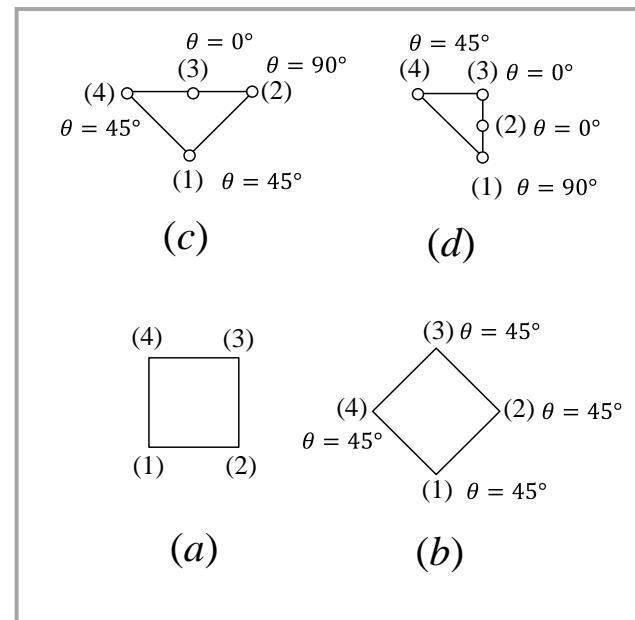


図-2 ノード番号とノードの座標回転角度

座標回転角度は、ノード(1)はノード(2)方向の回転角度、ノード(2)はノード(3)方向の回転角度、ノード(3)はノード(4)方向の回転角度、ノード(4)はノード(1)方向の回転角度とする。

四辺形要素内仮想仕事は、UC要素のGauss数値積分点で、 (s, n, ζ) 座標系で計算する。

UC要素ノード値を、それぞれ対応する四辺形要素ノードの θ とし、Gauss積分点の θ 値を計算し、当該点の座標回転系で計算する。

Gauss積分点の面積(体積)積分 $\int_{\Omega}(\cdots) ds dn d\zeta$ は、対応する四辺形要素のGauss積分点の面積(体積)を乗じることで行う。

3. dHd 適用法の簡単な具体例

(1) この章の目的

本稿はLocking-free法の提示を表題とし, dHd はそのための表示法である.

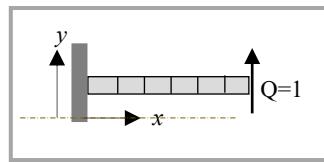
ここには簡単な固体の例で, dHd の適用法に焦点を当てて示して置く.

(2) 片持ちばかり

図のように, 先端に $Q=1$ のせん断力を与えた片持ちばかりの dHd 解法を示す. 剛体回転の導入法を示すのが目的.

境界条件は, 先端で
Neumann 条件, 支持点
で Dirichlet 条件.

Timoshenkoばかり型せ
ん断変形は無視する.



たわみを $v \equiv \Phi$, 剛体回転を $w^{\#} \equiv \Psi$, で表す.

初期値をいずれもゼロ, $Q = 0$ の静止状態とする.

Q は漸増でもよいが, ここでは時間ステップ $n = 0, 1, 2, \dots$ の, $n = 1$ で $Q = 1$ とする.

Δt の仮想時間ピッチで有限変形計算して行く.

剛性を G とし, 方程式は式(8)とする.

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} + ((\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y}) \frac{\partial \Phi}{\partial y})^n - G(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4})^{(n-0)} = 0 \quad (8)$$

要素番号は先端から $i=1, 2, \dots$ とし, ノード番号は $k = 0, 1, \dots$ とする.

解法は, 時間断面 $(n+0)$ で応力(項)を given として, 速度項の Φ^{n+1} を計算する. (時間ステップ $n=0$ では $\Phi^{n+1} = 0$ と計算される.)

次いで時間ステップを進め, 時間断面 $(n-0)$ で, 物質微分項を given とし, 応力項を計算する. (時間ステップ $n=1$ では, 要素 $i=1$ のみが, 1 要素の片持ちばかりとして計算される.)

応力項計算には剛体回転を, Ψ 要素を介して $\text{curl}^2 \Psi = \text{curl}(\partial \Psi / \partial y - \partial \Psi / \partial x)$ で, 入れる. (Φ 要素では $\text{curl}(\partial \Phi / \partial x - \Phi / \partial y) = 0$.)

せん断ひずみは Ψ, Φ いずれの要素でも表せるので, 数値的に等値 $<\nabla(\Psi - \Phi)> = 0$ とし, $<\text{curl} \Psi> = 0$ で最小化する. (C.-R.の関係式では主・客転倒. 共役変数の概念では説明可能.)

よって応力項は, 制約条件付きの仮想仕事式(9)で解いて行く.

$$\int_{\Omega} [\delta \Phi \cdot (\frac{\Phi^{n-0} - \Phi^{n-1}}{\Delta t} + ((\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y}) \frac{\partial \Phi}{\partial y})^{n-1}) - \delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot G \frac{\partial^2}{\partial y^2} (2\Phi - \Psi)^{(n-0)}] = 0 \quad (9)$$

上述, 速度項計算と応力項計算の2ステップを, 仮想時

間軸上で, 収束するまで反復計算する.

よって過渡状態と, 定常解として, 有限変形計算結果を得る. (回転は横成分なので, 1DではCoulombゲージが無い. つまり, 変位(したがって流通座標)交換の必要が無い.)

(3) 片持ち版

上図片持ちばかりを, y 軸と幅を入れて版(Scheibe)として, 同様に計算して行く.

Locking-free要素法として, 前章までに述べた, 付帯するいろいろな制約条件をクリアしながら計算して行く.

Coulombゲージを満たして行くので, u, v 間の交換があり, Φ の流通座標(したがってノード座標値)も交換されながら, 大変形する.

なお, 時間ステップ $n=0 \sim 1$ の Q は線形変化するが, 空間的にも, 先端上・下の隅要素のせん断応力は線形変化する. 有限要素法では弱形式で平均化する.

4. まとめと今後の課題

応力項は 9 自由度の変位勾配 $\nabla \mathbf{u}$ で表されるので 9 以上の条件式が必要である. そのため離散Helmholtz分解法を提唱している. 共役変数の概念で桁落ちを排除して行く. Cauchy-Riemannの関係式も同様である.

それが 2 つのLocking-free法の 1 つである.

要するに, 要素を完全 n 次関数で表し, いろいろな回転座標系で仮想仕事式を満たす, ことで桁落ちを回避する.

流線座標(Lagrange座標)上を移動する粒子を計算して行く“粒子-メッシュ法”的, 固体への適用法を示した.

固体では変位曲線に沿った“有限変位曲線”的座標系での計算である.

それをデカルト座標表示して計算して行く. それには静的載荷でも, 仮想時間による物質微分表示が必要なことが解った.

粒子-メッシュ法では, 粒子の自転に伴ってセル要素も回転する. したがって菱型状にもなる. それによる数値 Locking 対策として, 元のセル座標で計算して行くための計算法を提示した.

それがいま 1 つのLocking-free法である.

今後の課題は, 提示したスキームを諸氏に, 実務で活用して貰う, ことである.

[付録 1] 離散Helmholtz分解(dHd)表示法

任意のベクトル場 \mathbf{V} を, 次式で分解表示する.

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi^C + \nabla^1 \Psi \quad (\text{div} \Psi = 0, \nabla_{\text{diag}} \Psi = \nabla \Phi) \quad (a)$$

$\nabla \Phi$ は縦成分の内の, 非圧縮成分であり, $\nabla \Phi^C$ は圧縮・膨張成分である. ($\nabla^1 \Phi = 0, \nabla^1 \Phi^C \neq 0$)

$\nabla_{\text{diag}} \Psi$ は, $\nabla \Psi$ の対角成分を表すとする. Coulombゲージにより自明であるが, 念のため ($\nabla_{\text{diag}} \Psi = \nabla \Phi$)とした.

$\nabla^1 \Psi$ は、総和規約に従う表示 $\partial \Psi_i / \partial x_j$ を表す、とする。
すなわち $\nabla \Psi$ の行和で表すべきトルである。

\mathbf{V} はひずみベクトル場を表すとして、変位ベクトル場 \mathbf{u} は次式で表す。

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi^c + \nabla^1 \Psi \quad (\text{div} \Psi = 0, \nabla_{\text{diag}} \Psi = \nabla \varphi) \quad (b)$$

更に、ポテンシャルベクトル場 Ψ は次式で表すとする。

$$\Psi = \nabla v^c + \nabla^1 \lambda \quad (\text{div} \lambda = 0, \nabla_{\text{diag}} \lambda = \nabla v) \quad (c)$$

$\Phi^c = \nabla^2 v^c, \Phi = \nabla^2 v$ などの関係が在る。

他のベクトル場も、同様に表示して行く。

[付録2] 流線上移動粒子の流通座標表示と回転

Φ は流通座標で表し、モデル粒子の Φ は、流れ場では流線上に在る。（定義では、質量粒子の軌跡が流線。）

Φ は流線の長さであり、流通座標値の変化は $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{u}$ である。

ここでは固体のベクトル場も表す意味を込め、かつ離散表示する意味も込めて、流線を“粒線”とも呼ぶ、とする。

つまり、1粒子の Φ のLagrange座標を流通座標で表す。或いは1粒線を流通座標で表す。

粒子-メッシュ法では、粒線群を流通座標表示し、粒線群を、有限要素関数で補間して連続表示する。

粒線の接線方向、および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を、粒線座標（Lagrange座標）とすれば、横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力としても表れる。

ただし、粒子の自転は接線軸周りのみではなく、他の軸周りもある。そこで $\text{curl} \Psi$ も流通座標で表す。

1粒子の流通座標を \mathbf{X}_p で表し、初期（静止時）座標を \mathbf{X}_0 で表すとする。

$\nabla \Phi$ も流線座標で表した勾配となる。

dHd では $\nabla \Phi = \nabla_{\text{diag}} \Psi$ で表すとした。 Φ のデカルト座標上の増分である。つまりは方向余弦であり、 Φ は非圧縮を表すとしているので、 $\nabla^1 \Phi = 0$ である。

$\nabla \Phi$ は法線ひずみ（のデカルト座標表示）であり、相対量である。

静止時からの Φ の、方向別増分は $\Phi \nabla \Phi$ である。

時間ピッチ Δt 間の増分を $\Delta \Phi$ とすれば、 Δt 間の流通座標の増分 := \mathbf{u} （非圧縮変位）であり、 $\mathbf{u} = \Delta \Phi \nabla \Phi$ である。

体積変化の増分は $\Delta \Phi^c \nabla^1 (\Phi + \Delta \Phi^c)$ とし、一般解 $\nabla^1 \Phi = 0$ を加えて表す。

$\Delta \Phi \nabla \Phi$ は座標回転して = $\mathbf{u}(s, n, \zeta)$ （: 非圧縮、Lagrange 座標。 s が接線方向。）でも表す。

dHd では $\nabla_{\text{diag}} \Psi = \nabla \Phi$ と定義したので $\Delta \Phi \nabla_{\text{diag}} \Psi = \mathbf{u}$ であり、 Ψ のTaylor展開1次の項 $\langle \Delta \mathbf{X}_p \cdot \nabla \Psi \rangle$ を速度表

示 $\langle \Delta t \Psi \cdot \nabla \Psi \rangle$ して、縦成分 $\langle \Delta t \Psi_i \nabla_{\text{diag}} \Psi \rangle$ に着目すれば、 $\langle \Delta t^2 \Phi^2 \rangle = \Delta t^2 (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2)$ であり、 Φ は接線方向速度である。

（速度 Φ の） $\Delta t \Phi \nabla \Phi$ が $\Delta \mathbf{X}_p / \Delta t = \mathbf{u}_p / \Delta t$ である。

デカルト（Eulerian）座標型では $\langle \mathbf{U}_i = \Psi_j \nabla \Psi_i \rangle$ であり、非定常では加速度項を加えて物質微分表示する。

流線（Lagrangian）座標型でも、流通座標表示では、同様である。

粒子自身は $\text{curl} \Psi$ 分自転する。正確には $\text{shr} \Psi$ 分小さく公転しながら自転する。

$\Delta \Phi \nabla \Phi = \mathbf{u}$ は流通座標で表示するとしたが、変位に追従して表す座標（粒線座標）であり、固体では有限変形理論の変位に追従して表す“有限変位座標”とも呼べよう。

有限変位座標表示の有限変位ベクトル $\Delta \Phi \nabla \Phi$ は、非線形であることに留意する。

準静的載荷の仮想時間 Δt 後には、時間ステップを $n = 0, 1, 2, \dots$ として、 $\mathbf{u}^{n+1} = (1 + \Delta t)(\Delta \Phi \nabla \Phi)^n = (\Delta \Phi \nabla \Phi)^{n+1}$ であり、離散計算では仮想時間 Δt は小さいほど、当然乍ら、粒線を精度高く表せる。

任意のベクトル場を表すとする dHd では、 $\mathbf{u} = \nabla^1 \Psi$ である。（ただし、in case $(\text{div} \Psi = 0)$ 。）

渦度の表示に関しては次の通りである。

上述で、回転 $\text{curl} \Psi$ もデカルト座標で表すとした。

$\text{curl} \Psi_3$ が x - y 鏡面上の、流れ関数表示の渦度である。

ただし、 Ψ_3 は本来3D表示であり、2Dでは z 軸方向は剛体 ($\partial \Psi_3 / \partial z = \partial w^{\#} / \partial z = 0$) であるが、スライスした x - y 鏡面上の像は z 軸方向に、パラパラ漫画の如く変動する。

それを、小さく公転しながら自転する、と表現した。

3Dの $\partial \Psi_3 / \partial z \neq 0$ 分が公転で、 $\langle \partial \Psi_3 / \partial y - \partial \Psi_3 / \partial x \rangle$ 分が自転（渦度・剛体回転）である。

地球の公転が粒線とすれば、月は地球の周りを小さく公転しながら、自転する、と考える。

小さな公転を $\text{shr} \Psi$ で表し、自転を $\text{curl} \Psi$ で表示するものである。（月の裏側は、地球からは見えない。）

かつ、 Ψ_3 の z 軸周り x - y 鏡面像のみではなく、 Ψ_1, Ψ_2 の小さな公転・自転も在り、複雑に回転する。

参考文献

- [1] 例えば、数学ハンドブック p.p.258, 丸善, 1960.
- [2] 今村：粒子・“メッシュ法”による固体の数値解法、計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [3] 今村：自然座標系粒子運動の遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解による解法、計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [4] 今村：離散Helmholtz分解(dHd)表示に基づくMindlin板理論・ティモシェンコはり理論の考察と精解モデルの提案、理論応用力学論文集, 2022.