

# 高次化した回転とひずみ自由度を有する 三節点三角形要素の基礎的特性

Fundamental Properties of Enhanced Three-node Triangular Elements  
with Drilling and Strain Degrees of Freedom

木村皓詞<sup>1)</sup>, 神田康行<sup>2)</sup>

Koshi Kimura and Yasuyuki Kanda

1) 琉球大学院理工学研究科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原1, E-mail: k228423@eve.u-ryukyu.ac.jp)

2) 琉球大学工学部 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原1, E-mail: kanda@tec.u-ryukyu.ac.jp)

The rigid-plastic analysis or the large-deformation analysis consider the constant-volume condition as material characteristics. A three-node triangular element with drilling and strain degrees of freedom (GNTri3) can apply selective reduced integration to avoid volumetric locking. However, the accuracy of the hydrostatic stress of GNTri3 is slightly lower than that of the quadratic triangular element. This paper developed a quadratic GNTri3 element (GNTri3-2nd) for incompressible material analysis. We examined the zero-energy mode of GNTri3-2nd and its analysis accuracy for a nearly incompressible material.

**Key Words :** Three-node triangular element, Generalized finite element method, Zero-energy mode

## 1. 緒言

金属材料の塑性加工における剛塑性解析やゴムなどの大変形解析では、材料に体積一定条件を課されるため、体積ロッキングの回避が必要である。そのため、選択的低減積分 (SRI) を適用可能な四角形/六面体要素が広く適用されているが、シミュレーション過程での材料変形により、要素の再分割が必要となる。一方、三角形/四面体要素の要素分割は自動要素分割技術のデローニー分割を適用できるため、四角形/六面体要素より容易でロバストである。しかし、三角形一次要素 (FEM-1st) では、SRIを適用できず、体積ロッキングの回避は難しい。また、三角形二次要素 (FEM-2nd) は、リメッシング時における中間節点の削除を必要とする。そのため、微圧縮材料の解析に高精度な三節点三角形要素の有用性は高いと考えられる。

変位法の高精度な三節点三角形要素として、FEM-1stの変位関数に回転とひずみ自由度を導入した要素 (GNTri3) がある[1]。GNTri3は、一般化有限要素法 (GFEM) の近似に基づいた要素であり、ひずみ-変位マトリックスに被積分項の要素内座標 $(x, y)$ を有することから、SRIを適用可能である。著者らの文献[2]で示したようにGNTri3は、体積ロッキングを回避可能であるが、静水圧応力分布の精度がFEM-2ndよりも、やや低い傾向にある。GNTri3の回転自由度 $\theta$ と三つのひずみ自由度 $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ は、節点 $i$ 周りの変位場における1次のテイラー展開の $x$ ,  $y$ の偏微分係数により表される[3,4]。したがって、GNTri3の高精度化は、テイラー展開の高次項を用いることで期待される。

そこで、本論文は、変位関数のテイラー展開により、高次化したGNTri3要素を開発し、ゼロエネルギーモードを固有値解析により調査する。加えて、微圧縮材料に対する解析性能を平面ひずみ圧縮試験により検討した。

## 2. GNTri3の高次化

節点 $i$ 周りの変位場における2次のテイラー展開は次のようになる。

$$\begin{cases} u \approx u_i + \hat{x} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \hat{y} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i + \frac{1}{2} \hat{x}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \\ \quad + \frac{1}{2} \hat{y}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_i + \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_i \\ v \approx v_i + \hat{x} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i + \hat{y} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_i + \frac{1}{2} \hat{x}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_i \\ \quad + \frac{1}{2} \hat{y}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_i + \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Big|_i \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\hat{x} = x - x_i$ ,  $\hat{y} = y - y_i$ である。次に、微小ひずみの定義より、回転とひずみは以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

今、三角形要素の頂点節点に対して左回りに1, 2, 3と番号を付し、式(1)の1次近似および式(2)より、TianらのGNTri3の変位関数は、GFEM近似を利用して次のように表される。

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^3 \left( u_i - \hat{y}\theta_i + \hat{x}\varepsilon_{x_i} + \frac{1}{2}\hat{y}\gamma_{xy_i} \right) N_i \\ v = \sum_{i=1}^3 \left( v_i + \hat{x}\theta_i + \hat{y}\varepsilon_{y_i} + \frac{1}{2}\hat{x}\gamma_{xy_i} \right) N_i \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $i$ は節点番号、 $\theta_i$ は回転自由度、 $\varepsilon_{x_i}$ 、 $\varepsilon_{y_i}$ はそれぞれ $x$ 、 $y$ 方向のひずみ自由度、 $\gamma_{xy_i}$ はせん断ひずみ自由度、 $N_i$ はFEM-1stの形状関数である。このように、GNTri3は、テイラー展開の1次近似を適用した要素と解釈できる。

次に、GNTri3の高次化として、テイラー展開の2次近似を適用する。式(2)の $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\gamma_{xy}$ をそれぞれ、 $x$ 、 $y$ で偏微分すると、以下になる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{x,y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ \varepsilon_{y,x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \varepsilon_{y,y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy,x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xy,y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\varepsilon_{x,x}$ 、 $\varepsilon_{x,y}$ 、 $\varepsilon_{y,x}$ 、 $\varepsilon_{y,y}$ 、 $\gamma_{xy,x}$ 、 $\gamma_{xy,y}$ を文献[3]にならい曲率自由度と呼ぶ。式(1)に式(2)、(4)を代入し、GFEM近似を用いると、高次化したGNTri3の変位関数として、次式が得られる。

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^3 \left( u_i - \hat{y}\theta_i + \hat{x}\varepsilon_{x_i} + \frac{1}{2}\hat{y}\gamma_{xy_i} + \frac{1}{2}\varepsilon_{x,x_i}\hat{x}^2 + \varepsilon_{x,y_i}\hat{x}\hat{y} - \frac{1}{2}\varepsilon_{y,x_i}\hat{y}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy,y_i}\hat{y}^2 \right) N_i \\ v = \sum_{i=1}^3 \left( v_i + \hat{x}\theta_i + \hat{y}\varepsilon_{y_i} + \frac{1}{2}\hat{x}\gamma_{xy_i} - \frac{1}{2}\varepsilon_{x,y_i}\hat{x}^2 + \varepsilon_{y,x_i}\hat{x}\hat{y} + \frac{1}{2}\varepsilon_{y,y_i}\hat{y}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy,x_i}\hat{x}^2 \right) N_i \end{cases} \quad (5)$$

これ以降、式(3)を用いた要素をGNTri3-1st、式(5)を用いた要素をGNTri3-2ndと称す。

### 3. 数値解析例

#### (1) ゼロエネルギーモードおよび境界条件の検討

Fig. 1に示す固有値解析により、GNTri3要素のゼロエネルギーモードが発生しない節点自由度の拘束を調査した。ここで、図中のdofsは節点自由度 (Degrees of Freedoms) を示す。すなわち、Fig. 1 (a)のCase 1は、ゼロエネルギーモードの回避に必要な節点自由度の拘束数の調査、Fig. 1 (b)は剛体変位モード固定後の $u$ 方向におけるゼロエネルギーモードの回避に必要な付加節点自由度の拘束数の調査、Fig. 1 (c)は $u$ 方向におけるゼロエネルギーモードを回避可能な節点自由度の拘束の調査、Fig. 1 (d)は剛体変位モード固定後の $v$ 方向におけるゼロエネルギーモードの回

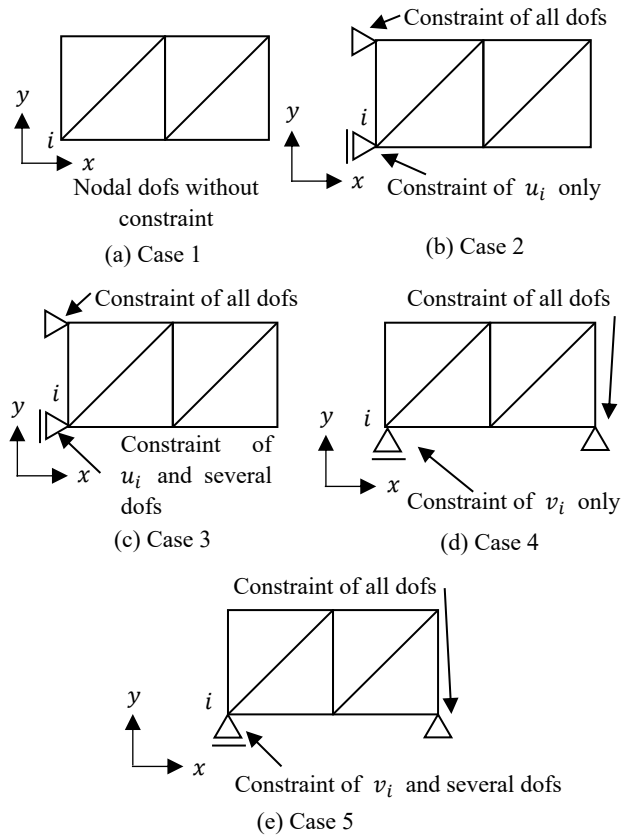


Fig. 1 Eigenvalue analysis model

Table 1 Eigenvalue at GNTri3-1st

Case	Constraint	ZE/Total dofs
1	-	9/36
2	$u_i = c$	2/36
3	$u_i = c, \theta_i = \varepsilon_{x_i} = c$ or $\varepsilon_{x_i} = \gamma_{xy_i} = c$	0/36
4	$v_i = c$	2/36
5	$v_i = c, \theta_i = \varepsilon_{y_i} = c$ or $\varepsilon_{y_i} = \gamma_{xy_i} = c$	0/36

\*ZE : Zero Eigenvalue

避に必要な付加節点自由度の拘束数の調査、Fig. 1 (e)は $v$ 方向におけるゼロエネルギーモードを回避可能な節点自由度の拘束の調査となっている。材料定数として、弾性係数は70 GPa、ポアソン比は0.3である。また、応力状態は平面応力状態を仮定した。

GNTri3-1stの解析結果をTable 1に示す。ここで、 $c$ は任意定数である。Case 1のゼロ固有値は、3個の剛体変位モードと6個のゼロエネルギーモードの9個と考えられる。Case 2のゼロ固有値は、Case 1に対して剛体変位モードと4個のゼロエネルギーモードを解消したために2個となっている。つまり、 $u$ 方向におけるゼロエネルギーモードの回避に必要な付加節点自由度の拘束は2個である。そこで、Case 3により $u$ 方向に必要な付加節点自由度を検討すると、ゼロ固有値は $\varepsilon_{x_i}$ の固定により1個減り、残りの1個は $\theta_i$ または $\gamma_{xy_i}$ の拘束により無くなった。Case 4およびCase 5より、 $v$ 方向の拘束は、 $u$ 方向と同じ傾向にあり、ゼロエネルギーモードが発生しない付加節点自由度の拘束は $\varepsilon_{y_i}$ に

Table 2 Eigenvalue at GNTri3-2nd

Case	Constraint	ZE/Total dofs
1	-	19/72
2	$u_i = c$	6/72
3	GFEM - 1st constraint, $\varepsilon_{x,x_i} = \varepsilon_{x,y_i} = \varepsilon_{y,x_i} = \gamma_{xy,x_i} = c$ or $\varepsilon_{x,x_i} = \varepsilon_{x,y_i} = \gamma_{xy,x_i} = \gamma_{xy,y_i} = c$	0/72
4	$v_i = c$	6/72
5	GFEM - 1st constraint, $\varepsilon_{x,y_i} = \varepsilon_{y,x_i} = \varepsilon_{y,y_i} = \gamma_{xy,y_i} = c$ or $\varepsilon_{y,x_i} = \varepsilon_{y,y_i} = \gamma_{xy,x_i} = \gamma_{xy,y_i} = c$	0/72

\*ZE : Zero Eigenvalue

加えて $\theta_i$ または $\gamma_{xy_i}$ であった。ここで、式(1)を適用した GFEM要素の付加節点自由度は、テイラー展開の偏微分係数と考えることができる[4]。そこで、この要素について同様な固有値解析を行った結果、ゼロエネルギーモードの回避には、各方向の偏微分係数を含む付加節点自由度の拘束が必要であった。このことから、 $\gamma_{xy_i}$ や $\theta_i$ の拘束は、 $\partial v / \partial x$ や $\partial u / \partial y$ の拘束と同等な意味となっているため、ゼロエネルギーモードを発生しないと考えられる。したがって、GNTri3-1stにおいては、 $\gamma_{xy_i}$ や $\theta_i$ のどちらかの拘束により、ゼロエネルギーモードが一個減ると推察される。

Table 2にGNTri3-2ndにおけるゼロエネルギーモードの調査結果を示す。Table 2より、GNTri3-2ndのゼロエネルギーモードを生じない節点付加自由度の拘束方法は、GNTri3-1stと同様の傾向であった。ここで、Case 3では、 $u$ 方向の変位関数に含まない自由度 $\gamma_{xy,x_i}$ も拘束する必要がある。これは、既述したように、 $\gamma_{xy,x_i}$ は式(4)のように $x$ 方向の偏微分係数を含むためと考えられる。同様にCase 5では、 $v$ 方向の変位関数に含まない自由度 $\gamma_{xy,y_i}$ の拘束が必要になる。

次に、GNTri3-1stの境界条件の設定法を述べる[1]。節点 $I$ と節点 $J$ 間の辺 $IJ$ 上における GNTri3-1stの変位関数は以下で表される。

$$\begin{cases} u(\bar{IJ}) = \left( u_i - \hat{y}_i \theta_i + \hat{x}_i \varepsilon_{x_i} + \frac{1}{2} \hat{y}_i \gamma_{xy_i} \right) N_i \\ \quad + \left( u_j - \hat{y}_j \theta_j + \hat{x}_j \varepsilon_{x_j} + \frac{1}{2} \hat{y}_j \gamma_{xy_j} \right) N_j \\ v(\bar{IJ}) = \left( v_i + \hat{x}_i \theta_i + \hat{y}_i \varepsilon_{y_i} + \frac{1}{2} \hat{x}_i \gamma_{xy_i} \right) N_i \\ \quad + \left( v_j + \hat{x}_j \theta_j + \hat{y}_j \varepsilon_{y_j} + \frac{1}{2} \hat{x}_j \gamma_{xy_j} \right) N_j \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\hat{x}_i = x - x_i$ ,  $\hat{y}_i = y - y_i$ ,  $\hat{x}_j = x - x_j$ ,  $\hat{y}_j = y - y_j$ である。次に、 $u_i = u_j$ および $v_i = v_j$ を仮定し、 $u(\bar{IJ})$ および $v(\bar{IJ})$ が規定値( $u_0, v_0$ )を満たすことを考慮すると、各ひずみ自由度は0に拘束される。したがって、 $i$ 節点における GNTri3-1stの $u, v$ 方向の境界条件は、それぞれ以下となる。

$$u_i = u_0, \quad \theta_i = \varepsilon_{x_i} = \gamma_{xy_i} = 0 \quad (7)$$

$$v_i = v_0, \quad \theta_i = \varepsilon_{y_i} = \gamma_{xy_i} = 0 \quad (8)$$

Table 1より、式(7), (8)は、ゼロエネルギーモードを発生しないことがわかる。

以上の議論をGNTri3-2ndに適用してTable 2の固有値解析結果を考慮することで、ゼロエネルギーモードを発生しない境界条件が次式のように導出される。

$$\begin{aligned} u(\bar{IJ}) &= u_0, \quad \theta_i = \varepsilon_{x_i} = \gamma_{xy_i} \\ &= \varepsilon_{x,x_i} = \varepsilon_{x,y_i} = \varepsilon_{y,x_i} = \gamma_{xy,x_i} = \gamma_{xy,y_i} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} v(\bar{IJ}) &= v_0, \quad \theta_i = \varepsilon_{y_i} = \gamma_{xy_i} \\ &= \varepsilon_{x,y_i} = \varepsilon_{y,x_i} = \varepsilon_{y,y_i} = \gamma_{xy,x_i} = \gamma_{xy,y_i} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

## (2) 微圧縮材料における平面ひずみ圧縮試験

Fig. 2に示す平面ひずみ圧縮試験により、GNTri3-1stおよび2ndの微圧縮材料に対する解析性能を検討した[2, 4]。解析に用いた材料定数として、弾性係数は70 GPa、ポアソン比は0.4999である。また、応力状態は平面ひずみ状態を仮定した。解析には、Fig. 2 (a)のように1/4対称条件を仮定し、要素分割はFig. 2 (b)に示す正方形を左下から右上に2分割した直角二等辺三角形を用いた。なお、 $y$ 方向の強制変位は $1.0 \times 10^{-4}$  mmであり、強制変位の作用する箇所は $x$ 方向変位も拘束している。解析に用いたガウス積分として、33点積分の完全積分(FI)とSRIとしていくつかの積分点数を検討した。そして、各GNTri3要素におけるSRI以降の数字はガウス積分点数を表している。解析結果の評価方法は、剛性を過剰に評価する体積ロッキングと静水圧応力分布の振動である圧力チェッカーボーディングの発生を検討した。ここで、体積ロッキングは、 $y$ 方向の節点力の合計値である荷重辺上反力、圧力チェッカーボーディングは、静水圧応力分布により評価した。また、解析結果は参考解のFEM-2ndと比較した。

まず、Fig. 3に文献[4]で示したFEM-2ndの解析結果を再掲する。荷重辺上反力は、12.27 Nである。静水圧応力分布は滑らかな分布となっており、圧力チェッカーボーディングを発生していない。そのため、FEM-2ndは、微圧縮材料に対し十分な解析性能を有しているといえる。

次に、Fig. 4にGNTri3-1stの解析結果を示す。荷重辺上反力として、FIが12.81 N、SRI with GP1が12.29 Nである。そのため、体積ロッキングの抑制として、FIはFEM-2ndよりもやや劣るが、SRI with GP1の荷重辺上反力はFEM-2ndとほぼ同等である。静水圧応力分布図を見ると、丸印のようにFI、SRI with GP1で共に市松模様状の分布となっており、圧力チェッカーボーディングの発生が認められるが、SRIを適用することで低減されている。なお、Fig. 4 (b)の圧力チェッカーボーディングは、要素分割を右下から左上に

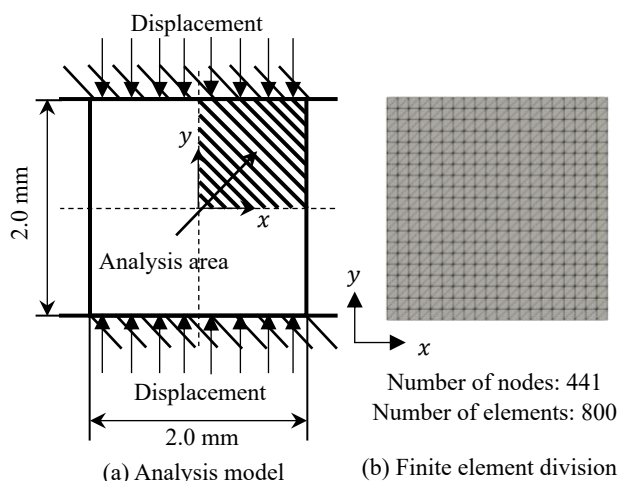


Fig. 2 Plane strain compression

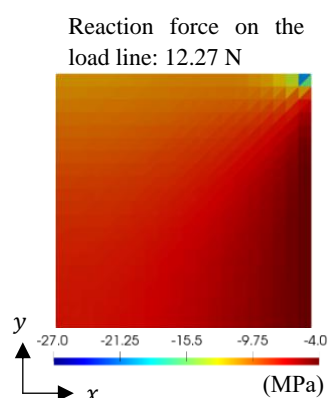


Fig. 3 Hydrostatic stress distribution of FEM-2nd in diagonal division.

行うことで軽減される[2].

Fig. 5にGNTri3-2ndの結果を示す. まず, 荷重边上反力は, FIが12.30 N, SRI with GP3が12.26 Nであり, FEM-2ndと比較すると, ともに体積ロッキングを回避している. 静水圧応力分布図を見ると, FIでは丸印のように圧力チェッカーボーディングの発生が認められる. 一方で, SRI with GP3の圧力チェッカーボーディングは, ほぼ発生しておらず, FEM-2ndと同等の解析精度を有していることが分かる. したがって, GNTri3-2ndはGNTri3-1stよりも高精度になっていることが確認できる.

#### 4. 結言

本論文では, GNTri3を高次化したGNTri3-2ndにおけるゼロエネルギーモードおよび境界条件の検討と微圧縮材料に対する解析性能を調査した. 結論を以下に示す.

- (1) GNTri3-2ndのゼロエネルギーモードを回避する境界条件は, 回転, ひずみおよび曲率自由度を表す偏微分係数を考慮すれば良いことがわかった.
- (2) GNTri3-2ndにおける微圧縮材料の解析性能は, SRIを適用することでFEM-2ndと同等な解析性能を有することが確認された.

今後の課題として, 剛塑性有限要素法などへの適用や三次元四面体要素への拡張が挙げられる.

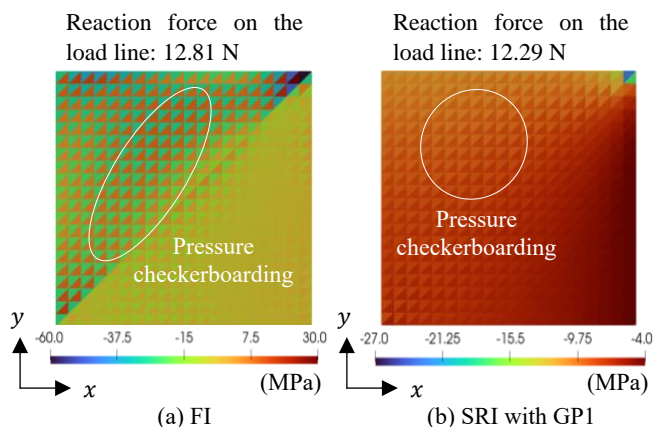


Fig. 4 Hydrostatic stress distribution of GNTri3-1st in diagonal division.

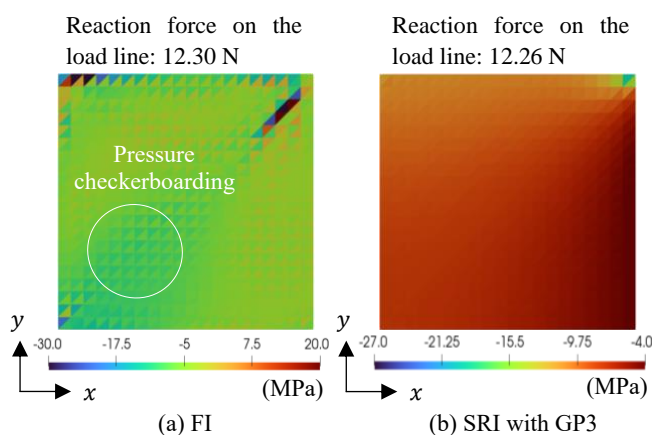


Fig. 5 Hydrostatic stress distribution of GNTri3-2nd in diagonal division.

#### 5. 謝辞

琉球大学工学部工学科社会基盤デザインコース 松原仁准教授には有意義な議論をいただいた. ここに記して謝意を表す.

#### 参考文献

- [1] R. Tian and G. Yagawa: Generalized nodes and high-performance elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, No. 15 (2005), pp. 2039–2071.
- [2] 神田康行: 回転とひずみ自由度を有する三節点三角形要素の剛塑性有限要素法への適用とその有効性の検討, 日本機械学会論文集, Vol. 85, No. 873 (2019), p. 19-00035.
- [3] 江戸孝昭, 松原仁, 原久夫: 粒状構造を有する脆性材料の離散き裂進展解析手法の開発および性能評価, 土木学会論文集C (地圏工学), Vol. 69, No. 1 (2013), pp. 31-45.
- [4] 木村皓詞, 神田康行: 一般化有限要素法近似に基づく三節点三角形要素の微圧縮材料に対する性能調査, 日本機械学会論文集, Vol. 88, No. 913 (2022), p. 22-00152.