

微圧縮弾性体の固有値問題における 圧力安定化四面体1次要素の数値特性

On Numerical Properties of Pressure Stabilized Linear Finite Element
for Nearly Incompressible Elasticity in Eigenvalue Problem of Vibration

山田貴博
Takahiro Yamada

学博 横浜国立大学大学院環境情報研究院 教授 (〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp)

In this paper, numerical properties of pressure stabilized linear tetrahedral finite element for nearly incompressible elasticity are discussed for the eigenvalue problem of free vibration. Exact solutions for a three-dimensional rectangular domain with the slip boundary condition, in which stationary modes of P-wave and S-wave can be obtained separately, are adopted for comparison with numerical solutions. The optimal stabilizing parameters are investigated.

Key Words : Nearly Incompressible Elasticity, Pressure Stabilized Element, Eigenanalysis

1. はじめに

ゴム等の高分子材料や生体軟組織では、体積剛性がせん断剛性に比べて極めて大きい微圧縮性あるいは体積変形はほぼ無視できる非圧縮性が観察される。このような材料に対しては、基本的に大変形解析が必要となり、ロバストな手法の開発が望まれている。筆者は、非圧縮性材料の準静的大変形解析で比較的ロバストで数値特性も良好なことが確認されている1次要素を基本とした圧力安定化有限要素法[1]に、近年開発された微圧縮体に対する分離型時間積分[2]を組み合わせた手法を提案した[3]。

安定化有限要素法では、人工的な安定化パラメータが導入されており、その大きさを適切に設定することが重要となる。圧力安定化有限要素法のこれまで研究では、準静的問題[1]や自由振動の時刻歴応答解析[3]の結果から安定化パラメータについての評価を行ってきた。一方、動的問題における数値計算手法の数値特性は、振動固有値の精度で決定されることから、振動固有値の近似性能を把握することは重要である。しかしながら、振動固有値問題において要素の数値特性を議論された例は見当たらない。これは、ソリッド要素を用いる連続体に対して振動固有値問題の厳密解と比較する手法がこれまで知られていなかったことが一因であると考える。そこで本研究では、筆者が提案した厳密解を導出可能な振動固有値問題[4]と同様なアプローチで、弾性波動における等容変形成分であるS波の定在波として表される固有モードと体積変形成分であるP波の定在波として表される固有モードを分離しながら、すべての固有値、固有モードを陽に記述可能な問題を導出し、固有値問題における要素の数値特性の評価を行う。本研究では、特に微圧縮性の場合のP波の定在波として現れる固有モードと対応する固有角振動数に注目し、厳密解と数値解を比較することで最適な安定化パラメータの決定を目指す。

2. 微圧縮弾性体の固有値問題の有限要素近似

(1) 摂動支配方程式と弱形式

本研究では、微圧縮均質等方弾性体の動的問題に対する混合型定式化を考える。材料構成則については、体積変形成分と等容変形成分が分離可能なものを前提とする。このとき、領域 Ω で定義された時刻 t に依存する変位 \mathbf{u} と圧力 p を未知数とすると、自由振動問題の運動方程式と体積ひずみと圧力の関係を表す体積変形に対する構成方程式は以下のように表される。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) - \nabla p, \quad (1)$$

$$\frac{1}{K} p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで、 ρ は密度、 K は体積弾性係数である。また、 $\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u})$ は変位から計算される偏差応力であり、等方弾性体を考えると、せん断弾性係数 μ を用いて以下のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) = \mu \left\{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right\}$$

ここで、 \mathbf{I} は単位テンソルである。

本研究で考える圧力安定化有限要素法では、圧力のラプラス作用素に対応した項を非圧縮条件式に付加するものとなっている[1,3]。そこで、体積ひずみと圧力の関係を表す構成方程式(2)に圧力安定化項となる摂動項を以下のように付加する。

$$\frac{1}{K} p - \tau \Delta p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

ここで、 τ は安定化パラメータであり、詳細は後述する。支配方程式(1)(2)に対して、変分法的定式化を行う

と弱形式は以下となる。

$$\int_{\Omega} \rho v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \int_{\Omega} \epsilon'(v) : 2\mu \epsilon'(u) dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot v p dx \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{K} qp + \tau \nabla q \cdot \nabla p \right) dx + \int_{\Omega} q \nabla \cdot u dx = 0 \quad (5)$$

ここで、 v, q はそれぞれ u, p の許容変数である。また、 $\epsilon'(u)$ は変位 u から偏差ひずみテンソルを与える以下の微分作用素である。

$$\epsilon'(u) = \frac{1}{2} \{ \nabla u + (\nabla u)^t \} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot u$$

(2) 空間離散化と振動固有値問題

圧力安定化1次要素を用いて、弱形式(4)(5)の空間離散化を行う。変位 u とその許容変数 v を四面体1次要素で離散化された変数をそれぞれ u_h, v_h 、圧力 p とその許容変数 q を要素毎に定数として離散化した変数をそれぞれ p_h, q_h とする。さらに、 u_h, v_h の節点ベクトルをそれぞれ \mathbf{U}, \mathbf{V} 、 p_h, q_h の自由度ベクトルをそれぞれ \mathbf{P}, \mathbf{Q} とする。このとき、半離散化された代数方程式が以下のように得られる。

$$\mathbf{V}' \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \mathbf{V}' \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{V}' \mathbf{C} \mathbf{P} \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}' \mathbf{S} \mathbf{P} + \mathbf{Q}' \mathbf{K}_S \mathbf{P} - \mathbf{Q}' \mathbf{C}' \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (7)$$

上式で現れる行列は以下で定義される。

$$\int_{\Omega} \rho v_h \cdot u_h dx = \mathbf{V}' \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \epsilon'(v_h) : 2\mu \epsilon'(u_h) dx = \mathbf{V}' \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h dx = \mathbf{Q}' \mathbf{C}' \mathbf{U} \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{K} p_h q_h dx = \mathbf{Q}' \mathbf{S} \mathbf{P} \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \tau \nabla p_h \cdot \nabla q_h dx = \mathbf{Q}' \mathbf{K}_S \mathbf{P} \quad (12)$$

ここで、安定化項に対応する行列 \mathbf{K}_S の定義式(12)において、圧力とその許容変数は要素内定数となる不連続関数で表されているため、空間微分を直接求めることができない。これについては、従来から要素境界上の圧力ギャップに基づく離散表現として取り扱われてきたが[1]、筆者はこれを圧力の勾配の離散表現を用いて再定義した[3]。本研究でも、再定義された近似式を採用する。

また、安定化パラメータは、無次元パラメータ β を用いた次式で表す。

$$\tau = \beta \frac{h^2}{K} \quad (13)$$

ここで、 h は代表要素長さであり、本研究では要素辺長の最小値を用いる。

固有値問題を導くために、固有角振動数 ω を用い、時間に関する単振動の関数 $e^{i\omega t}$ と有限要素近似されたモー

ドに対する節点変位ベクトル $\bar{\mathbf{U}}$ と圧力自由度ベクトル $\bar{\mathbf{P}}$ により以下のように変数分離する。

$$\mathbf{U} = e^{i\omega t} \bar{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{P} = e^{i\omega t} \bar{\mathbf{P}} \quad (14)$$

このとき、許容変数ベクトル \mathbf{V}, \mathbf{Q} の任意性より、次の行列の一般固有値問題が得られる。

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{S} + \mathbf{K}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

上式の左辺の係数行列が正則で無いことから、圧力変数 $\bar{\mathbf{P}}$ を消去して、以下のような標準的な一般固有値問題に変換し、固有値解析を行う。

$$-\omega^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{U}} = \{ \mathbf{K} - \mathbf{C}(\mathbf{S} + \mathbf{K}_S)^{-1} \mathbf{C}^t \} \bar{\mathbf{U}} \quad (16)$$

なお、質量行列 \mathbf{M} については、本研究では集中化質量を用いる。

3. 検証問題の構成

(1) 弾性波動方程式と固有値問題

検証問題を構成するため、固有値問題の厳密解を弾性波動論[5]にしたがって導出する。まず、自由振動問題の支配方程式(1)(2)を変位のみを変数として表すと以下となる。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (17)$$

ここで、 λ はラメの第一定数であり、 $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$ である。微分作用素についての恒等式

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (18)$$

を用いると、式(17)は次のように書き換えられる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (19)$$

ヘルムホルツの定理より、変位 \mathbf{u} はスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル Ψ の和として表すことができる。

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi \quad (20)$$

微分作用素の定義から ϕ と Ψ が滑らかであれば

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0 \quad (21)$$

が成立する。したがって、式(19)(20)より ϕ と Ψ がそれぞれ次の波動方程式を満たすとき、変位 \mathbf{u} は弾性体の運動方程式(19)を満たすものとなる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_p^2 \Delta \phi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \Psi \quad (22)$$

ここで、 c_p, c_s は次式の P 波速度と S 波速度である。

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (23)$$

このとき、式(22)の第1式、第2式はそれぞれ P 波すなわち体積変形の伝播および S 波すなわち等容変形の伝播を表す。

いま、波動方程式(22)の解 $\phi(\mathbf{x}, t)$, $\Psi(\mathbf{x}, t)$ に対して、時刻 t の関数と空間変数 \mathbf{x} の関数による変数分離を行うと、固有角振動数 ω_p , ω_s を用いて、解は以下のように表示できる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega_p t} \bar{\phi}(\mathbf{x}), \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega_s t} \bar{\Psi}(\mathbf{x}) \quad (24)$$

ここで、 $\bar{\phi}, \bar{\Psi}$ は固有関数（固有モード）であり、次の固有値問題の解である。

$$c_p^2 \Delta \bar{\phi} = -\omega_p^2 \bar{\phi}, \quad c_s^2 \Delta \bar{\Psi} = -\omega_s^2 \bar{\Psi} \quad (25)$$

このとき、スカラーポテンシャルの固有モード $\bar{\phi}$ とベクトルポテンシャル $\bar{\Psi}$ に対して、変位モードはそれぞれ

$$\bar{u}_p = \nabla \bar{\phi}, \quad \bar{u}_s = \nabla \times \bar{\Psi} \quad (26)$$

と表される。したがって、この変位モードにおいて物理的に合理的な境界条件となるよう領域形状とスカラーポテンシャル $\bar{\phi}$ とベクトルポテンシャル $\bar{\Psi}$ の具体形を与えることで、厳密解が陽に表示できる固有値問題を構成する。

(2) 直方体領域における厳密解の構成

本研究では、直方体領域を $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$ を考え、前節で述べた固有値問題の解を構成する。

P 波の定在波については、円筒領域の場合 [4] と同様に、固有モードを表すスカラ関数 $\bar{\phi}$ を次式で表す。

$$\bar{\phi} = \cos \frac{l\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{m\pi}{L_2} x_2 \cos \frac{n\pi}{L_3} x_3 \quad (27)$$

ここで、 l, m, n は波数を表す非負整数であり、 $l = m = n = 0$ となる自明な解を除く。このとき、角振動数 ω_p は

$$\omega_p = c_p \pi \sqrt{\left(\frac{l}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_3}\right)^2} \quad (28)$$

で表され、式(26)の第1式より変位モードは以下となる。

$$\bar{u}_p = \begin{cases} \frac{l\pi}{L_1} \sin \frac{l\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{m\pi}{L_2} x_2 \cos \frac{n\pi}{L_3} x_3 \\ \frac{m\pi}{L_2} \cos \frac{l\pi}{L_1} x_1 \sin \frac{m\pi}{L_2} x_2 \cos \frac{n\pi}{L_3} x_3 \\ \frac{n\pi}{L_3} \cos \frac{l\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{m\pi}{L_2} x_2 \sin \frac{n\pi}{L_3} x_3 \end{cases} \quad (29)$$

この変位モードは、各境界の面で法線方向成分が零の滑り条件を満足している。

一方、S 波の定在波については、固有モードを表すべきトル関数 $\bar{\Psi}$ を次式で表す。

$$\bar{\Psi} = \begin{cases} D_1 \cos \frac{l\pi}{L_1} x_1 \sin \frac{m\pi}{L_2} x_2 \sin \frac{n\pi}{L_3} x_3 \\ D_2 \sin \frac{l\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{m\pi}{L_2} x_2 \sin \frac{n\pi}{L_3} x_3 \\ D_3 \sin \frac{l\pi}{L_1} x_1 \sin \frac{m\pi}{L_2} x_2 \cos \frac{n\pi}{L_3} x_3 \end{cases} \quad (30)$$

ここで、 l, m, n は P 波の場合と同様に波数を表す非負整数、 D_1, D_2, D_3 はモード形を表すパラメータである。上記のベクトル関数は、 $l = m = n = 0$ だけではなく、 l, m, n のいずれか 2 つが 0 であっても、恒等的にゼロベクトルとなり、自明な解となることに注意する。このとき、角振動数 ω_s は

$$\omega_s = c_s \pi \sqrt{\left(\frac{l}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_3}\right)^2} \quad (31)$$

で表され、式(26)の第2式より変位モードは以下となる。

$$\bar{u}_s = \begin{cases} \left(\frac{D_3 m}{L_1} - \frac{D_2 n}{L_3}\right) \pi \sin \frac{l\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{m\pi}{L_2} y \cos \frac{n\pi}{L_3} z \\ \left(\frac{D_1 n}{L_2} - \frac{D_3 l}{L_1}\right) \pi \cos \frac{l\pi}{L_1} x_1 \sin \frac{m\pi}{L_2} y \cos \frac{n\pi}{L_3} z \\ \left(\frac{D_2 l}{L_3} - \frac{D_1 m}{L_2}\right) \pi \cos \frac{l\pi}{L_1} x_1 \cos \frac{m\pi}{L_2} y \sin \frac{n\pi}{L_3} z \end{cases} \quad (32)$$

これから境界上で変位モードが滑り境界を満足していることが分かる。このとき、 l, m, n が正の整数であるとき、式(32)よりモード形を表すパラメータ D_1, D_2, D_3 は 2 つの独立な定数で表され、固有値の重複度は 2 となる。また、 l, m, n のいずれか 1 つが 0 の時、 $\bar{\Psi}$ は 1 成分のみが非ゼロとなることから、固有値の重複度は 1 となる。

以上より、P 波の定在波によるモードと S 波の定在波によるモードが同じ滑り境界条件を満足するものとして厳密解が構成された。したがって、数値計算においても滑り境界条件を設定することで、P 波の定在波によるモードと S 波の定在波によるモードの両方を含むすべての固有値、固有モードが厳密解と比較可能となる。

4. 固有値の数値特性

(1) 問題設定

前節で述べた滑り境界を課した直方体領域における固有値問題の厳密解と圧力安定化四面体 1 次要素による有限要素近似解との比較を行い、有限要素解の数値特性の評価を行う。領域形状については、辺長が同じ立方体とすると、座標軸に対する対称性が発生し、固有値の重複が生じる。本研究ではこのような固有値の重複を避けるため、相異なる辺長として $L_1 = 0.9$, $L_2 = 1.0$, $L_3 = 1.1$ と設定する。材料定数は、せん断弾性係数 $\mu = 400$ とし、ポアソン比 ν については、微圧縮性として 0.48 と 0.49 の場合について検討する。要素分割は図-1の一辺を 5 分割した対称な一様分割を用いる。

(2) 厳密解の固有値分布の特徴

S 波モードに関する厳密解について、ポアソン比 $\nu = 0.48$ の場合のモード番号と固有角振動数および固有モード(30)における最大波数の関係を図-2 に示す。500 次以下の固有値に対して P 波モードは数個しか現れないため、ポアソン比 $\nu = 0.49$ の図もほぼ同じとなる。

(3) 振動固有値の精度

図-3 にポアソン比 $\nu = 0.48$ の場合の S 波によるモードと P 波によるモードそれぞれについて固有角振動数

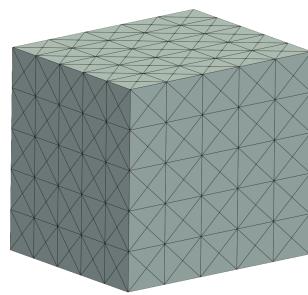


図-1 要素分割

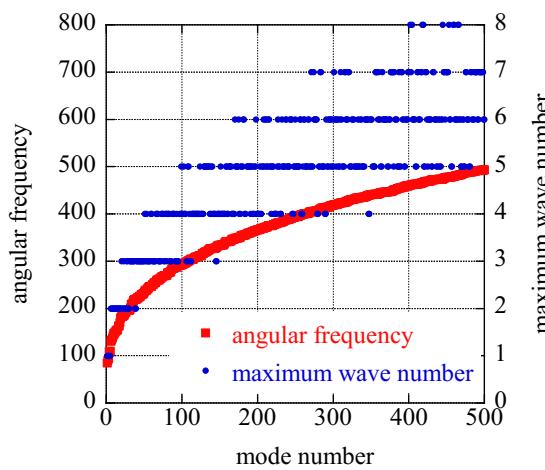
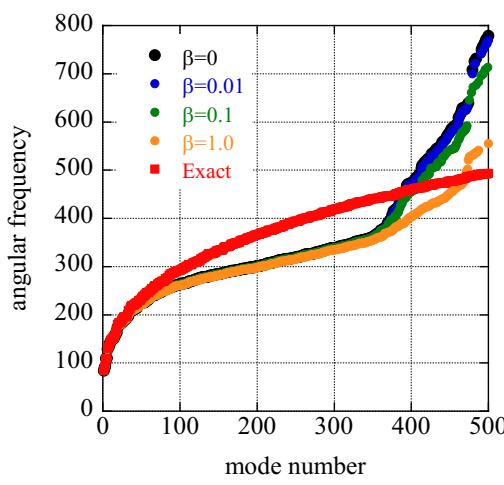


図-2 S 波モードに関する厳密解のモード番号と固有角振動数、最大波数 ($\nu = 0.48$)

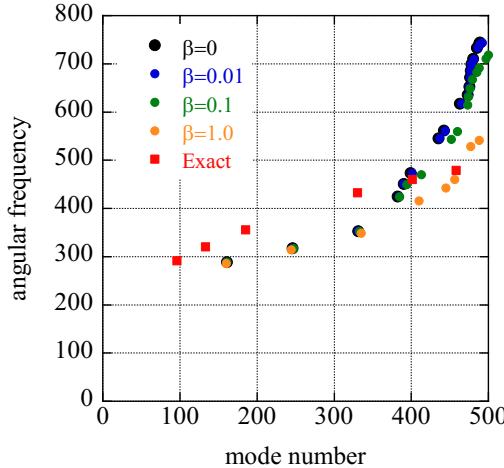
を昇順に並べたモード番号と固有角振動数の関係を示す。特に本研究では、S 波と P 波によるモードを分離した厳密解が得られていることから、筆者が示した手法 [4]に基づき、計算結果で得られた固有モードと厳密解の固有モードの対応関係を特定し、各角振動数が P 波によるものか S 波によるものかを分類している。本研究の固有値問題は前節で述べたように S 波のモードに対しては重複固有値を含むことから、重複固有値に対応した固有モードについては、厳密解の固有モードの線形結合を考え、線形結合に対して一致度が高いモードを選択する手法を新たに導入している。

今回用いた要素分割は、一辺の分割が 5 であり、適切に表現できる波数は 2 までとなり、対応する固有値は、図-2 より概ね 50 次より小さいものとなる。したがって、S 波については適切にモードが表現できる 50 次程度までは固有角振動数の精度が十分高いが、それ以降は精度が低下していることが分かる。さらに、350 次以降では急速に精度が低下している。

前述したように、一辺が 5 分割の要素分割を用いたことから、この次数は、この要素分割では表現が不可

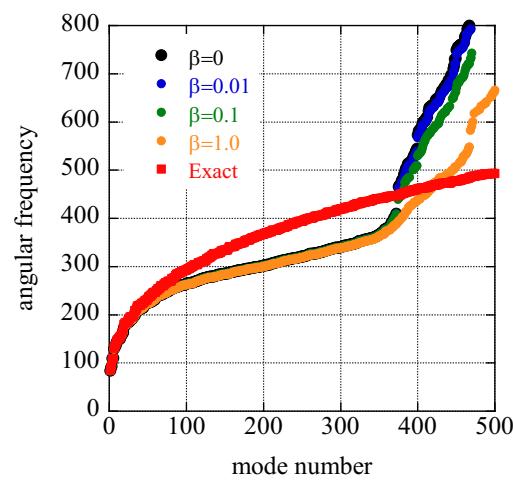


(a) S 波モード

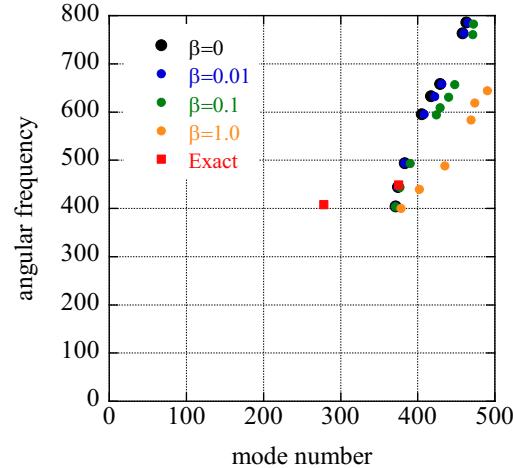


(b) P 波モード

図-3 モード番号と固有角振動数 ($\nu = 0.48$)



(a) S 波モード



(b) P 波モード

図-4 モード番号と固有角振動数 ($\nu = 0.49$)

能な波数 7 あるいは 8 のモードに対応していることが図-2 より分かる。すなわち、要素分割の空間解像度によって固有角振動数の精度が決定されている。

S 波モードについては、安定化パラメータの大きさは固有角振動数の精度が確保されている次数では解にはほとんど影響を与えていないことも見て取れる。モードの表現能力が失われた高次のモードでは、安定化パラメータの大きさによって解が変化するが、固有値解析の精度とは無関係と言える。

一方、微圧縮性の場合、伝播速度が S 波に比べて大きくなることから、P 波によるモードは低次には現れない。図-3(b) より、P 波モードにおける最小固有角振動数から数個の固有モードが S 波モードにおいて精度が低下している固有角振動数範囲に現れていることが分かる。このとき、対応するモードの固有角振動数の大きさに関しては、数値解は高い精度が確保されていることが分かる。これは、これらのモードでは、最大波数は 1 となっており、用いた要素分割で十分解像できるものであることから説明できる。しかしながら、モード番号については、厳密解と数値解は大きくずれてる。これは、周囲に存在する S 波モードの固有角振動数は精度が低下したものとなっていることに起因すると考えられる。さらに、S 波モードにおいてモード形状の表現が不可能な高次の固有角振動数の範囲に現れた P 波モードについては、モード番号のずれも大きくなっている。

図-4 にポアソン比 $\nu = 0.49$ の場合を示すが、基本的な数値特性は $\nu = 0.48$ のときと同様である。

(4) 安定化パラメータと P 波モード固有値の精度

図-5 に安定化パラメータと P 波モードにおける最小固有角振動数の相対誤差を示す。2つのポアソン比 $\nu = 0.48, 0.49$ においてほぼ結果は重なっている。また、他の低次の固有角振動数についての結果も同様であった。したがって、適切な安定化パラメータは準静的解析の場合 [1] とほぼ同じで 0.5 前後であると言える。

5. おわりに

本研究では、固有値解析により、圧力安定化 1 次要素の数値特性と適切な安定化パラメータの大きさを評価した。動的問題でも従来の静的問題における安定化パラメータと同じ値を用いれば良いことが分かった。

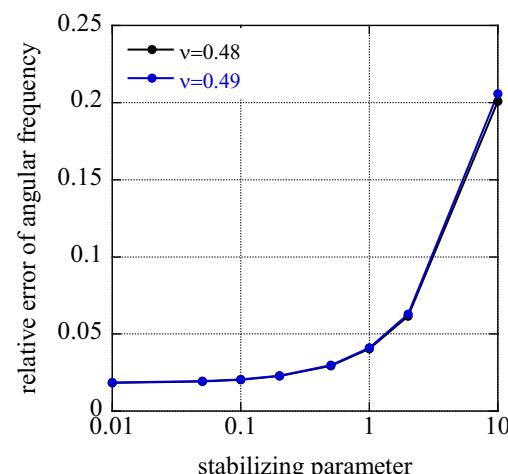


図-5 安定化パラメータと P 波の最小固有角振動数の相対誤差

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 20H04198 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] 山田貴博: 超弾性体の大変形問題に対する圧力安定化四面体 1 次要素, 土木学会論文集 A2, Vol. 73, pp.I_405–I_415, 2017.
- [2] 山田貴博: 微圧縮弾性体の動的問題に対する分離型時間積分, 土木学会論文集 A2, Vol. 77, pp. I_217–I_225, 2021.
- [3] 山田貴博: 圧力安定化有限要素法を用いた微圧縮弾性体の波動伝播解析, 計算工学講演会論文集, 27, 2022.
- [4] 山田貴博: 特定 P 波モードを用いた弾性円筒の振動固有値解析の検証, 土木学会論文集 A2, Vol. 76, pp. I_259 – I_267, 2020.
- [5] P. M. Shearer: Introduction to Seismology, 3rd ed., Cambridge University Press, 2019.
- [6] D.M. Day and L.A. Romero: An analytically solvable eigenvalue problem for the linear elasticity equations, SAND2004-3310, 2004.