

アイソレート要素法による板曲げの高周波振動解析

High-Frequency Vibration Analysis of Plate Bending by Isolated Element Method

風間悦夫¹⁾, 菊地 鷹²⁾

Etsuo Kazama and Atsushi Kikuchi

1) 数値解析開発株式会社 (〒381-0051 長野市若槻団地4-81,E-mail: e.kazama@kjb.biglobe.ne.jp)

2) 数値解析開発株式会社 (〒195-0072 東京都町田市金井,E-mail: kikuchi.atsushi@job.zaq.jp)

High-frequency eigenvalue analysis is possible using the isolated element method (IEM). The element matrix of IEM is asymmetric and each element is required to automatically satisfy the mixed boundary conditions. QR eigenvalue calculation method is used in this paper. We propose a method of defining the boundary condition function for the potential energy of the boundary and satisfying the boundary condition by functional analysis. This paper presents the formulation of eigenvalue analysis for thin plates. We describe the results of the numerical analysis by IEM in this paper.

Key Words : Isolated Element Method, High-frequency Vibration Analysis, Eigen Value, FEM

1. はじめに

アイソレート要素法(IEM)を用いると高周波の固有値解析が可能である。IEMの要素マトリックスは非対称で、それぞれの要素は混合境界条件を自動的に満たす機能が要求される。また高周波固有値への収束性の実現と本論文で用いたQR固有値計算は複素数が生じるから定式化はヒルベルト空間で議論する。要素と要素の変位と応力の混合条件を満たすために、境界のポテンシャルエネルギーに関する境界条件関数を定義して関数解析で境界条件を満たす方法を提案する。本論文は薄い平板の固有値解析の定式化を行う。

主な記号の定義などを以下に示す。

$$G := \{[A_i]_{i=1}^n \in \Omega | \Omega \in \mathcal{H}^2, n \in \mathbb{N}\}$$

G は領域 Ω を n 個の要素(閉集合族)として分割することを表す。

$$X := \{(x, y, z)_i \in A_i | i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

X はそれぞれの要素に独立に局所座標系を設定することを表す。

$$w_i := a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + \dots + a_{22}\xi^6 + \dots + a_{28}\eta^6 \quad (a_j|_{j=1}^{28} \in \mathbb{R})$$

$$\xi := \{x/S | x \in X, S \in \mathbb{R}, S \text{は最大要素の辺の最大長さ}\}$$

$$\eta := \{y/S | y \in X, S \in \mathbb{R}, S \text{は最大要素の辺の最大長さ}\}$$

w_i は薄い平板要素 i の z 方向の変位を表す。

$$Up|_i := \{\text{要素}i\text{のひずみエネルギー} | i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}, \text{ターゲット要素は単に} Up \in \mathcal{H}^2 \text{と表す}\}$$

$$I_{BPE} := \{\text{境界ポテンシャルエネルギー} | I_{BPE} \in \mathcal{H}\}$$

$$\Pi_1 := \{\text{第1形式の汎関数} | \Pi_1 \in \mathcal{H}^2\}$$

$$\Pi_2 := \{\text{第2形式の汎関数} | \Pi_2 \in \mathcal{H}^2\}$$

図1に局所座標系と境界力と変位の関係を示す。モーメントと回転の方向を軸性ベクトルとして表す。 n は外向き単位法線ベクトル, s は反時計回りの単位ベクトルを表す。

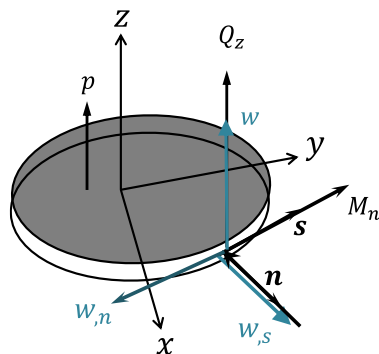


図1 局所座標系と境界力、変位の関係

2. アイソレート要素法の汎関数

2.1 平板のひずみエネルギー

図1の局所座標系において Kirchhoff の板曲げ理論にしたがえば薄い平板のひずみエネルギーは式(1)で表せる。

$$U_P = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (M_x w_{,xx} + M_y w_{,yy} + 2M_{xy} w_{,xy}) d\Omega \quad (1)$$

図1の定式化の対象要素(以後ターゲット要素と書く)の記号を説明する。 $Q_n \in \mathcal{H}, M_n \in \mathcal{H}, M_{sn} \in \mathcal{H}, w \in \mathcal{H}^2$ はそれぞれせん断力,曲げモーメント,ねじりモーメント,たわみである。 $p(x, y) \in \mathbb{R}^2$ は分布荷重である。ここで鷲津が導いた式(2)を利用する[1]。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (M_x w_{,xx} + M_y w_{,yy} + 2M_{xy} w_{,xy}) d\Omega = \\ & \int_{\partial\Omega} (-Q_z w + M_n w_{,n} + M_{ns} w_{,s}) dS + \int_{\Omega} (M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy}) w d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)の右辺の第1積分を I_{PB} と書き,第2積分を I_P とする。式(2)の左辺は式(1)の右辺の-2倍になっている。したがって,式(1),(2)から

$$U_P = 2U_P - U_P = -(I_{PB} + I_P) - U_P \quad (3)$$

となる.ここに

$$I_{PB} = \int_{\partial\Omega} (-Q_z w + M_n w_{,n} + M_{ns} w_{,s}) dS \quad (4)$$

$$I_P = \int_{\Omega} (M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy}) w d\Omega \quad (5)$$

ここに,

$$w_{,n} = \frac{\partial w}{\partial n}, w_{,s} = \frac{\partial w}{\partial s}, w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, w_{,yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, w_{,xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, M_{x,xx} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}, M_{y,yy} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, M_{xy,xy} = \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), M_y = -D(\nu w_{,xx} + w_{,yy}), \\ M_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy}, \\ Q_z = (M_{x,x} + M_{xy,y})n_x + (M_{xy,x} + M_{y,y})n_y,$$

ここに, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$, E は縦弾性係数, ν はポアソン比, (n_x, n_y) は境界の外向き法線方向余弦である.
式(4)の $I_{PB} \in \mathcal{H}^1$ は境界のひずみエネルギーである.

2.2 境界ポテンシャルエネルギー

定義 G によりそれぞれの要素は座標系と変位は独立に定義されるが閉集合族であるから,ターゲット要素と隣接要素の境界は共有集合になり,境界力と境界の変位の力学的関係を議論することができる.

アイソレート要素法では要素ごとに独立した座標系で変位関数を定義する.要素と要素の境界力の平衡条件と変位の連続条件を満たすことが必要になる.本論文では,変位の連続条件を満たすために境界ポテンシャルエネルギー関数を用意してターゲット要素と隣接要素の境界力と変位がそれぞれ力学的平衡条件と変位の連続条件を満たすような汎関数を定義する.

ターゲット要素に局所座標系 n, s, z に対応して単位ベクトルを $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{k}$ を設ける.同様に隣接要素に単位ベクトル $\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{k}}$ を設ける.1章の定義 G すなわち領域 Ω の中では $\mathbf{n} = -\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{s} = -\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$ とする.

図2はターゲット要素(左側)と隣接要素(右側)のそれぞれの境界の点 A と \bar{A} とが共通集合に含まれるときのせん断力と変位の関係を表す(図はそれぞれの力学量の区別が見やすいように要素と要素を離している).このときターゲット要素の変位 w と隣接要素の \bar{w} の方向は一致し,ターゲット要素のせん断力 Q_z と隣接要素のせん断力 \bar{Q}_z の向きは図1の向きに一致すると仮定する.

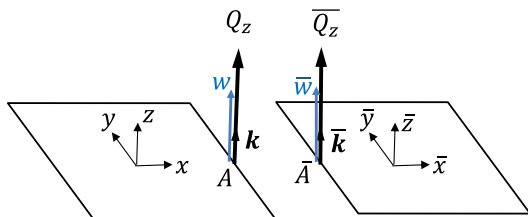


図2 せん断力とたわみの関係

図2の Q_z と w は式(4)の第1項の $Q_z w$ と同一である.ターゲット要素の点 A における Q_z と w のなす仕事は $Q_z k w k = Q_z w$ である.隣接要素では $\bar{Q}_z \bar{k} \bar{w} \bar{k} = \bar{Q}_z \bar{w}$ である.ターゲット要素のと隣接要素とが接する境界条件に与するポテンシャルエネルギーは上述の2つの和とすると $\int_{\partial\Omega} Q_z w dS + \int_{\partial\Omega} \bar{Q}_z \bar{w} dS$ である.両要素の境界力の平衡条件 $Q_z k + \bar{Q}_z \bar{k} = 0$ であるから $\bar{Q}_z = -Q_z$ である.したがって,せん断境界に関するポテンシャルエネルギーは式(6)で表せる.

$$\int_{\partial\Omega} Q_z (w - \bar{w}) dS \quad (6)$$

図3にターゲット要素と隣接要素の曲げモーメントと回転角(たわみ角)の関係を表す.ターゲット要素と隣接要素の回転角は同じ向きであるが曲げモーメントは図1に一致すると仮定する.

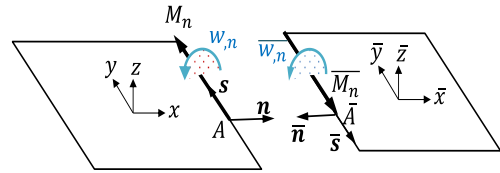


図3 曲げモーメントと回転角の関係

曲げモーメントと回転角を軸性ベクトル(右ねじの進行方向を正とする)としてターゲット要素の点 A における仕事は $M_n s w_{,n} (-s) = -M_n w_n$ と計算して,隣接要素の点 \bar{A} における仕事は $\bar{M}_n \bar{s} \bar{w}_{,n} \bar{s}$ と計算される.モーメントベクトルの平衡条件から $M_n s + \bar{M}_n \bar{s} = 0 \rightarrow \bar{M}_n \bar{s} = -M_n s$ である.したがって,隣接要素の仕事は $\bar{M}_n \bar{s} \bar{w}_{,n} \bar{s} = -M_n s \bar{w}_{,n} \bar{s} = M_n \bar{w}_n$ となる.ターゲット要素と隣接要素の接触部の w_n 境界条件に与するポテンシャルエネルギーは式(7)で表せる.

$$-\int_{\partial\Omega} M_n (w_n - \bar{w}_n) dS \quad (7)$$

図4に捩じりモーメントと回転角の関係を示す.

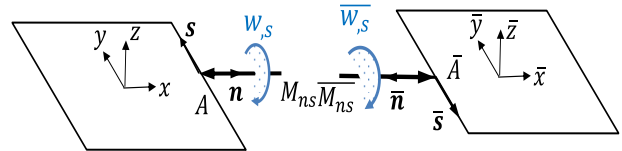


図4 捩じりモーメントと回転角の関係

曲げモーメントと同様に軸性ベクトルの内積計算により,ターゲット要素と隣接要素の接触部の $w_{,s}$ 境界条件に与するポテンシャルエネルギーを計算すると式(8)で表せる.

$$-\int_{\partial\Omega} M_{ns} (w_{,s} - \bar{w}_{,s}) dS \quad (8)$$

ターゲット要素と隣接要素の変位の連続条件に与する

ポテンシャルエネルギーは式(6),(7),(8)の和 I_{BPE} で表わされる。

$$I_{BPE} = \int_{\partial\Omega} Q_z(w - \bar{w}) dS - \int_{\partial\Omega} M_n(w_n - \bar{w}_n) dS - \int_{\partial\Omega} M_{ns}(w_s - \bar{w}_s) dS \quad (9)$$

本論文では I_{BPE} を境界ポテンシャルエネルギーと呼ぶことにする。

2.3 外力のポテンシャルエネルギー

隣接要素の境界力 $\bar{Q}_z, \bar{M}_n, \bar{M}_{ns}$ はターゲット要素の変位 w, w_n, w_s に作用して外力のポテンシャルエネルギーを生じる。図 2,3,4 から接触点における $\bar{Q}_z, \bar{M}_n, \bar{M}_{ns}$ と w, w_n, w_s のなすそれぞれの仕事は $\bar{Q}_z \mathbf{k} \mathbf{w} \mathbf{k} = \bar{Q}_z w$, $\bar{M}_n \mathbf{s}(-w_n \mathbf{s}) = \bar{M}_n w_n$, $\bar{M}_{ns} \mathbf{n}(-w_s \mathbf{n}) = \bar{M}_{ns} w_s$ である。したがって、ターゲット要素と隣接要素の接触する部分の外力のポテンシャルエネルギー I_F は式(10)で表せる。

$$I_F = \int_{\partial\Omega} (\bar{Q}_z w + \bar{M}_n w_n + \bar{M}_{ns} w_s) dS \quad (10)$$

式(9),(10)によりアイソレート要素の汎関数を下のよう

$$\Pi = U_P - I_F - \int_{\Omega} p w d\Omega + I_{BPE} \quad (11)$$

式(1),(9),(10)を式(11)に代入すると式(12)を得る。

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (M_x w_{xx} + M_y w_{yy} + 2M_{xy} w_{xy}) d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega} (\bar{Q}_z w + \bar{M}_n w_n + \bar{M}_{ns} w_s) dS \\ & - \int_{\Omega} p w d\Omega + \int_{\partial\Omega} Q_z (w - \bar{w}) dS - \int_{\partial\Omega} M_n (w_n - \bar{w}_n) dS \\ & - \int_{\partial\Omega} M_{ns} (w_s - \bar{w}_s) dS \end{aligned} \quad (12)$$

この式の右辺の第1積分は $U_P = -(I_{PB} + I_P) - U_P$ であるから式(1),(4),(5)を代入して整理すると式(13)の第2形式の汎関数を得る。

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & - \int_{\Omega} (M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + p) w d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (M_x w_{xx} + M_y w_{yy} + 2M_{xy} w_{xy}) d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} \{(Q_z - \bar{Q}_z)w - (M_n + \bar{M}_n)w_n - (M_{ns} + \bar{M}_{ns})w_s\} dS \\ & + \int_{\partial\Omega} Q_z (w - \bar{w}) dS - \int_{\partial\Omega} M_n (w_n - \bar{w}_n) dS - \int_{\partial\Omega} M_{ns} (w_s - \bar{w}_s) dS \end{aligned} \quad (13)$$

3. アイソレート要素法の変分方程式

第2形式の汎関数により $\delta\Pi_2 = 0$ とおくと式(14)を得る。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + p) \delta w d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} (M_x w_{xx} + M_y w_{yy} + 2M_{xy} w_{xy}) d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} \{(Q_z - \bar{Q}_z) \delta w - (M_n + \bar{M}_n) \delta w_n - (M_{ns} + \bar{M}_{ns}) \delta w_s\} dS \\ & + \int_{\partial\Omega} (w - \bar{w}) \delta Q_z dS - \int_{\partial\Omega} (w_n - \bar{w}_n) \delta M_n dS \\ & - \int_{\partial\Omega} (w_s - \bar{w}_s) \delta M_{ns} dS = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

1章で $\mathbf{w} \in \mathcal{H}^2$ は閉集合族 A_i において一様収束な部分関数列により定義されている。 \mathbf{w} から導いた境界力および変位 w_n, w_s も同様に一様収束な部分関数列になる。このとき関数空間の収束定理[3,4]により式(14)から下の諸式が得られる。

$$M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + p = 0 \quad (15)$$

$$Q_z - \bar{Q}_z = 0, M_n + \bar{M}_n = 0, M_{ns} + \bar{M}_{ns} = 0 \quad (16)$$

$$w - \bar{w} = 0, w_n - \bar{w}_n = 0, w_s - \bar{w}_s = 0 \quad (17)$$

第2形式の汎関数を用いたのは、力学的境界条件を表す式(16)を陽に示すためである。しかし、隣接要素の境界力 $\bar{Q}_z, \bar{M}_n, \bar{M}_{ns}$ の外力ポテンシャルによりターゲット要素には自然境界条件として境界力が生じるから、実際の板曲げ問題の解析に式(12)の汎関数を用いる必要はない。第2形式の汎関数は左辺の1行目の第1,2積分に試験関数 w の3階微分があるために要素行列の完備性、稠密性が失われている。そのため、固有値解析の場合、質量行列と要素行列の中身が極端にアンバランスになり固有値計算の収束性に支障をもたらす。実際の解析では式(12)の Π_1 から導出された式(18)の変分方程式を用いる。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} (M_x w_{xx} + M_y w_{yy} + 2M_{xy} w_{xy}) d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega} (\bar{Q}_z \delta w + \bar{M}_n \delta w_n + \bar{M}_{ns} \delta w_s) dS \\ & - \int_{\Omega} p \delta w d\Omega + \int_{\partial\Omega} \{(w - \bar{w}) \delta Q_z - (w_n - \bar{w}_n) \delta M_n \\ & - (w_s - \bar{w}_s) \delta M_{ns}\} dS = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

なお、固有値解析する場合は物体力 p を式(19)に示される慣性力に置き換えて質量行列を作成する必要がある。

$$p = -\rho \omega^2 w \quad (19)$$

ここに、 ρ ：平板の単位面積当たりの質量、 ω ：固有円振動数、 w ：変位である。

特性方程式を導くために、1章の w の定義を式(20)に書き換える。

$$w = N(x, \gamma) A \quad (20)$$

ここに、 $N(x, \gamma)$ はターゲット要素の局所座標系の関数を表し、 A は未定係数ベクトルを表す。この式から $w_n = N_n A$, $w_s = N_s A$ と表せる。また2.1末の記号の定義式から、 $M_x = K_x A$, $M_y = K_y A$, $M_{xy} = K_{xy} A$, $M_y = K_y A$, $M_{xy} = K_{xy} A$, $Q_z = K_Q A$ と表せることは明らかである。また、隣接要素に関する記号は $\bar{w} = \bar{N} \bar{A}$ などと表すことにする。これらの記号を変分方程式に用いると式(18)の二行目の第一積分は下のよう

$$- \int_{\Omega} p \delta w d\Omega = \delta A \lambda M_e A \quad (21)$$

ここに、 $M_e = \int_{\Omega} \rho N^t N d\Omega$, $\lambda = \omega^2$ である。なお M_e はターゲット要素の質量行列、 λ は固有値である。また、例えば式(18)の第二積分は次式のように表せる。

$$\int_{\partial\Omega} (w - \bar{w}) \delta Q_z dS = \delta A (M_{qw} A - \bar{M}_{qw} \bar{A}) \quad (22)$$

ここに、 $M_{qw} = \int_{\partial\Omega} K_q^t N dS$, $\bar{M}_{qw} = \int_{\partial\Omega} K_q^t \bar{N} dS$ である。式(18)のその他の項の記号の変換は省略するが、結局

ターゲット要素の変分方程式を整理すると式(23)になる.

$$\delta A[(K_e + \lambda M_e)A + \sum_{c=1}^L \bar{K}_c \bar{A}_c] = 0$$

(23)

δA の任意性から一要素についての式(24)が得られる.

$$(K_e + \lambda M_e)A + \sum_{c=1}^L \bar{K}_c \bar{A}_c = 0$$

(24)

この式の添字 c は隣接要素を表す. L はターゲット要素 e に隣接する要素の個数である.

固有値計算は式(24)により構造全体の特性方程式を組み立ててから実行する.

4. 数値計算例

下記の計算条件で薄い平板の面外変形の固有値を本方法で解析した結果を表 1 に示す.
平板の寸法 : $1\text{m} \times 1\text{m} \times 5\text{mm}$, 分割数 : 26×26 , 4 辺単純支持
ポアソン比 : 0.3, ヤング率 : 209GPa, 密度 : 7900Kg/m³

5. まとめ

アイソレート要素法では節点,Lagrange乗数法,ペナルティ法を用いる代わりに離散化された要素の幾何学的境界条

件あるいは変位の連続条件を満たす関数を考案して,その関数を境界ポテンシャルエネルギーと呼ぶことにした. 強い収束性の試験関数により高完備性の閉集合を準備して,アイソレート要素法による薄い平板の固有値解析を実行すると広帯域の周波数で高精度の解が得られることを明らかにした.

参考文献

[1] 鷲津久一郎, 1972,日本鋼構造協会編,弾性学の変分原理概論,培風館.pp.41-42.

[2] Timoshenko,S.P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, 2nd. ed., McGraw-Hill.

[3] 加藤敏夫, 2001, 復刊 位相解析 ー理論と応用への入門ー, 共立出版, pp.167-169.

[4] R.クーラント／D.ヒルベルト[著], 藤田 宏／高見穎郎／石村直之[訳], 2013, 数理物理学の方法 上, 丸善出版, pp.61-66.

表 1 薄い平板の面外変形の固有振動数計算結果

波数	10× 10	12× 12	14× 14	16× 16	18× 18	20 × 20	22× 22	24 × 24
計算値 Hz	2439.7	3508.0	4769.3	6229.0	7896.2	9781.7	11895.6	14240.7
理論値 Hz	2444.9	3520.7	4792.1	6259.1	7921.6	9779.8	11833.5	14082.9
誤差%	-0.22	-0.36	-0.48	-0.48	-0.32	0.02	0.52	1.12