計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　計算工学会

# 平面応力問題に対するNitsche法に基づくアイソレート要素法

Isolated element method based on the Nitsche’s method for plane stress problem

秋山亮太[1)]，山田貴博[2)]
Akiyama Ryota and Takahiro Yamada
1) 横浜国立大学　環境情報学府情報環境専攻（〒240-8501　横浜市保土ヶ谷区常盤台79-7,
E-mail: akiyama-ryota-mp@ynu.jp)
2) 学博 横浜国立大学 環境情報研究院 教授（〒240-8501　横浜市保土ヶ谷区常盤台79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp）

In the isolated element method, independent displacement functions for each element are assumed and the continuity condition between elements is imposed. To achieve such numerical procedures, Nitsche’s method is widely adopted. In this work, an alternative isolated element method, in which Nitsche’s method is applied and displacement functions are expressed in terms of natural coordinates, is proposed. Numerical examples in plane stress problems are shown to evaluate numerical properties and effectiveness of the proposed procedure,

***Key Words :*** *Isolated element method, Nitsche’s Method, Plane Stress*

## 1.　緒言

風間らによって開発されたアイソレート要素法[1]は，要素ごとに独立な変位場を仮定し，要素表面で境界条件を満たすことで各要素を接続する手法である，有限要素法に比べて変位関数を比較的自由に設定でき，固有値解析に対して精度が高いことが示されている．一方，領域間の変位の連続条件を付帯条件として課す方法としては，Nitsche法が様々な分野で用いられている[2,3]．

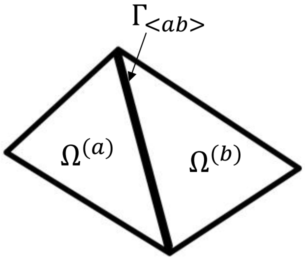
本研究は，Nitsche法に基づく定式化と有限要素法と同様な自然座標で記述される変位関数を用いたアイソレート要素法を提案するものである．平面応力問題の計算例で提案手法の特性を確認する．

## 2.　理論

アイソレート要素法では，最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いる．次式の汎関数を定義する．

$$\Pi \; = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon})\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{\boldsymbol{t}} \; \cdot \boldsymbol{u}\, d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{p}} \; \cdot \boldsymbol{u}\, d\Omega \qquad (1)$$

$W(\boldsymbol{\varepsilon})$ はひずみエネルギー，$\tilde{\boldsymbol{t}}$ は表面力，$\bar{\boldsymbol{p}}$ は物体力を表す．領域Ωは閉境界Γで囲まれたM個の部分領域から構成されているものとする．




図−1 2要素$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$の境界$\Gamma_{<ab>}$

すなわち

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{M} \Omega^{(e)} \qquad (2)$$

このとき，汎関数は各部分領域の和として次式のように表すことができる．

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}} W(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{\boldsymbol{t}} \; \cdot \boldsymbol{u}\, d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} \bar{\boldsymbol{p}} \; \cdot \boldsymbol{u}\, d\Omega\right) \qquad (3)$$

それぞれの要素の汎関数は次式で表される．

$$\Pi^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} W\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{\boldsymbol{t}}^{(e)} \cdot \boldsymbol{u}^{(e)} d\Gamma - \int_{\Omega^{e}} \bar{\boldsymbol{p}}^{(e)} \cdot \boldsymbol{u}^{(e)} d\Omega \qquad (4)$$

アイソレート要素法で必要となる領域間の変位の連続条件の記述を簡便に行うため，図−1のような2要素で考える.要素間の変位の連続条件を付帯条件として課すためにLagrange未定乗数法を導入する．

境界$\Gamma_{<ab>}$での変位の連続性の条件

$$\boldsymbol{u}^{(a)} = \boldsymbol{u}^{(b)} \qquad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{ab}} \qquad (5)$$

をLagrange未定乗数λを用いて汎関数に導入する．これにより2要素の汎関数は次式のように表される．

$$\Pi\,(\boldsymbol{u}) = \Pi^{(a)} + \Pi^{(b)} + \int_{\Gamma_{ab}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \left(\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right) d\Gamma \qquad (6)$$

ペナルティ法では，Lagrange未定乗数を変位によって次式で表すものと考える．

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{p}{2}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})) \qquad (7)$$

ここで，$p$は次式で表されるパラメータである．

$$p = \beta\frac{E}{h} \tag{8}$$

また，βはペナルティ係数，Eは弾性係数，$h$は要素サイズを表している．よって，2要素での汎関数は次式のようになる．

$$\Pi = \Pi^{(a)} + \Pi^{(b)} + \int_{\Gamma_{ab}} \frac{p}{2}\left|\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right|^2 d\Gamma \tag{9}$$

Nitsche法を用いて安定化を行う．Nitsche法では，ペナルティ法に，隣接する弾性体の応力場から求められる境界の応力ベクトルを導入する．境界の応力ベクトルは，次式で表されるCauchyの式により求める，

$$\boldsymbol{t}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{u}^{(e)}\right)\boldsymbol{n}^{(e)} \tag{10}$$

ここで，$\boldsymbol{n}^{(e)}$は要素$e$の表面外側方向の単位法線ベクトルである．よって，Nitsche項の境界応力は，対象要素と隣接要素の表面力の足し合わせにより表現している．よって，2要素での汎関数は次式で表される．

$$\begin{aligned}\Pi = \Pi^{(a)} + \Pi^{(b)} &+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{<ab>}} p\left|\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right|^2 d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \left(\boldsymbol{t}^{(a)} - \boldsymbol{t}^{(b)}\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right) d\Gamma\end{aligned} \tag{11}$$

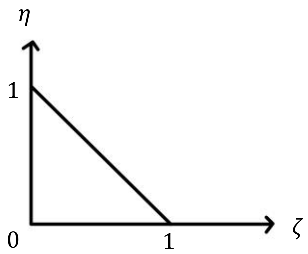
式(11)の第一変分を零として最小条件を導くと次式のようになる．

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \delta\Pi^{(a)} &+ \delta\Pi^{(b)} \\ &+ \int_{\Gamma_{ab}} p\left(\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right)\cdot\left(\delta\boldsymbol{u}^{(a)} - \delta\boldsymbol{u}^{(b)}\right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \left(\boldsymbol{t}^{(a)} - \boldsymbol{t}^{(b)}\right)\cdot\delta\left(\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \delta\left(\boldsymbol{t}^{(a)} - \boldsymbol{t}^{(b)}\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right) d\Gamma \\ &= 0\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)をそれぞれの要素ごとに分けた式を式(13)，式(14)に示す．

$$\begin{aligned}&\delta\Pi^{(a)} - \int_{\Gamma_{ab}} p\left(\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}^{(a)} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \left(\boldsymbol{t}^{(a)} - \boldsymbol{t}^{(b)}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}^{(a)} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \left(\boldsymbol{u}^{(a)} - \boldsymbol{u}^{(b)}\right)\cdot\delta\boldsymbol{t}^{(a)} d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\delta\Pi^{(b)} - \int_{\Gamma_{ab}} p\left(\boldsymbol{u}^{(b)} - \boldsymbol{u}^{(a)}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}^{(b)} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \left(\boldsymbol{t}^{(b)} - \boldsymbol{t}^{(a)}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}^{(b)} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{<ab>}} \left(\boldsymbol{u}^{(b)} - \boldsymbol{u}^{(a)}\right)\cdot\delta\boldsymbol{t}^{(b)} d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{14}$$



図−2 親要素座標系

## 3. 離散化

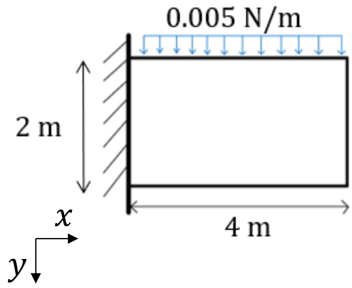
図−2に示すような親要素座標を用いてサブパラメトリック要素と同様の考え方で形状を1次有限要素で表現し，親要素座標（自然座標）を用いて変位関数を記述する．変位を2次関数で表す場合は，以下のように表される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2\zeta + a_3\eta + a_4\zeta^2 + a_5\zeta\eta + a_6\eta^2 \\ b_1 + b_2\zeta + b_3\eta + b_4\zeta^2 + b_5\zeta\eta + b_6\eta^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

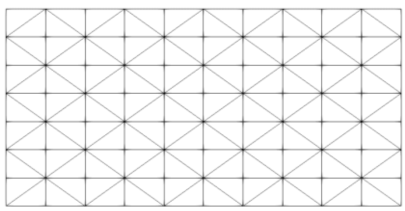
この式により，弱形式を離散化した．

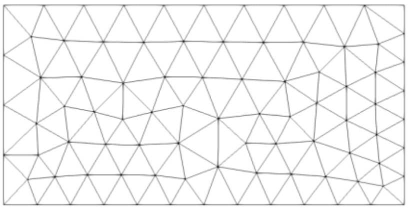
## 4. 数値計算結果

本手法により，図−3に示すような片持ち平板の曲げ解析をし，その精度を検証する．ヤング率1000[$Pa$]，ポアソン比0.25，厚さ0.005[$m$]とした．参照解として，汎用有限要素コードANSYS 2021 Rを用い解析を行ったものを扱った．要素は図−4, −5に示すような三角形の等分割要素と不整合分割要素の2種類を用いた．ただし，変位関数は2次までのものを使用した．表−1に，片持ち平板右上のy方向変位の参照解とNitsche法の解を示す．提案する手法は，要素分割パターンに依存せず，高い精度の解が得られることが分かる．

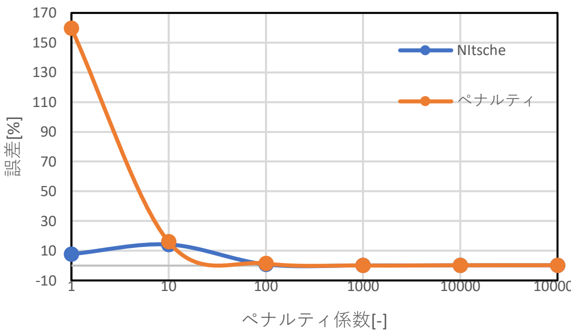


図−3 片持ち平板のモデル図


図−4 等分割要素（要素数140）



図−5 不整合分割要素（要素数141）




図−6 ペナルティ係数と参照解との誤差

表−1 変位と参照解との差

| | | 変位[$m$] | 参照解との差[%] |
|---|---|---|---|
| 参照解 | | 0.06111 | |
| Ntische法 | 等分割 | 0.06097 | 0.2290 |
| | 不整合 | 0.06102 | 0.08201 |

次に，Nitsche法の安定化の影響を調べるため，Nitsche法とペナルティ法で，ペナルティ係数を変化させ比較した．それぞれの結果を図−6示す．ペナルティ係数を大きくすると解が参照解と近づくことがわかる．また，Nitsche法のほうがペナルティ係数を小さくとった時の参照解との差が小さいことがわかる．

## 5. 結論

Nitsche法を導入したアイソレート要素法を提案した．本論文では，変位関数にアイソパラメトリック要素の考え方を導入している．平面応力問題である平板の曲げ問題では，提案手法の基本的な有効性が示された．

### 参考文献

[1] 風間悦夫，菊池厖：変分天理によるアイソレート要素法の開発と応用に関する研究，日本計算工学会論文集, 2020巻，2000.

[2] Hansbo, P.: Nitsche’s method for interface problems in computational mechanics, GAMM-Mitt.28, No. 2, pp.183 -206, 2005..

[3] 月野誠，山田貴博，Nitscheの方法を用いた有限被膜法における摩擦なし接触解析手法，日本計算工学会論文集，2019巻，2019.