

有限要素混合変分法： 准C1級有限要素法

Finite element mixed variational method: quasi class C1 finite element method

今村純也¹⁾

Junya Imamura

1) 博(工) imi計算工学研究室 (〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp)

This report is part of research regarding Helmholtz theorem, to apply the Helmholtz decomposition ($H-d$) to the finite element method. $H-d$ is, however, in a certain coordinate expression. I proposed an improved $H-d$ expression called dHd . The dHd includes $H-d$ and other coordinate expressions. That is a multidirectional FEM concept. The objective of this report is to reveal that the boundary conditions between elements exist two-types conditions; one is continuation of the strains, and other is of the forces. I propose a mixed variational method to the situations.

Key Words : Mixed variational method, quasi C1 class element. Continuation of strain. Continuation of forces, Transfer matrix method, State vector.

1. 目的と背景

本稿は、材料特性(剛性)の異なる有限要素の系の、計算法確立を目的とする。

剛性 G の差が大きな有限要素間の安定した計算法確立には、極端なケースとして、一方の要素剛性が $G = \infty$ (剛体要素・剛体)の場合の確立が必要である。

等間隔メッシュを適用するには、剛体要素間の数値計算も可能でなくてはならない。

剛体の変位・応力の計算には、変位・応力それぞれ、カップリング行列[†]が必須である。

カップリング行列は、遷移行列(還元法行列)の剛性を ($G = \infty$) とすることで表し得る。

既報[1]で、准 C^1 連続な有限要素法を提示した。

不完全3重3次要素の状態量{変位, 応力}の応力成分は、頂点ノードでのみ連続、とする要素法である。(頂点ノードの中間近傍では、要素辺(や稜線)法線方向勾配は不連続。)

隣接要素とノードパラメータを共有することで要素間を連続させるのが有限要素法のポイントであるが、応力を連続させるべき境界面と、ひずみを連続させるべき境界面のあることに気付いた。(同一剛性の要素間では、いずれを連続させても同一なので気付けない。)

そこで本稿は、{変位, ひずみ}をノードパラメータとする変位要素と、{変位, 応力}をノードパラメータとする状態量要素の、混合型要素による仮想仕事変分法を提示する、ことを目的とする。

[†] 2点間の $\{w, \theta\}$ および $\{M, Q\}$ のカップリング行列は、いずれも $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。棒の $\{u\}$ および $\{N\}$ は、いずれも $[1]$ 。

2. 方法

(1) サブパラメトリック要素法の採用

本モデルでは変位・状態量いずれも、不完全3重3次関数で表すが、要素形状(形状要素)は3重1次のサブパラメトリック要素とし、近似的に計算して行く。

かつ、要素形状を $1 \times 1 \times 1$ の単位セル(UC)で間接的に表す、単位セル法(UCM)による写像計算法を採用する。

要素内座標値を、有限要素で表すとする概念の方が、式(1)の係数 $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ を、式(2)のように差分表示して補間する、とする方法より高次要素へ適用し易い。

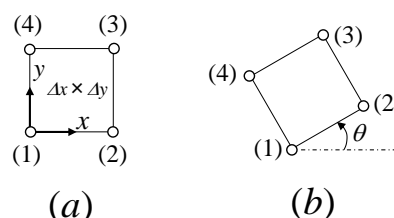


図-1 双1次要素のノード番号(k)と辺の回転角

$$\varphi(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4xy \quad (1)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta x}x + \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{\Delta y}y + \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4}{\Delta x \Delta y}xy \quad (2)$$

(2) 粒子-メッシュ法の採用

形状要素は時間 t の線形式で空間を移動する Lagrange 型で表す。

六面体形状要素の頂点ノード k の座標値を $\{x, y, z\}_k$ とし、単位セルの頂点ノード値を $\{x_i\}_k$ とし、六面体の独立変数を単位セル要素で、間接的に計算して行く。

六面体はそれぞれ異なる体積でもよし、とし、体積データを付帯して移動する。

当然、密度 ρ や剛性 G など、材料特性も付帯する。

単位セル重心と、六面体要素重心に粒子を置き、移動時には、直近の粒子どうしを関係付けて、隣接六面体要素の情報を得る方法を採用。（その詳細スキームは別報[2][3]による。）

(3) 載荷法の仮定と基礎方程式

準静的載荷とし、仮想仕事式には加速度項・速度項は無視する。

したがって荷重は、Neumann境界に外力を、Dirichlet境界には変位を(ゼロ値を含めて)与える。かつ漸増法とし、仮想時間ピッチを Δt で、時間ステップを $n = 0, 1, 2, \dots$ で表す。

変位を \mathbf{u} ，ポアソン比を ν として、方程式を式(3)とする。

$$G(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{div} \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

(3) 形状要素の仮定

本稿は“Helmholtz分解に基づく連続体理論への有限要素法の適用に関する研究”の一環であり、Helmholtz分解を修正した“離散Helmholtz分解(dHd)法”で計算する。

dHd 法では、 \mathbf{u} の非圧縮成分を Ψ で表し、 $\nabla \Psi$ を対角成分と非対角成分に分け、 $\nabla \Psi = \{\nabla_{diag} \Psi, \nabla_{offd} \Psi\}$ で表す。

かつ、 $\nabla \Phi = \nabla_{diag} \Psi$ で表し、圧縮成分を Φ^c で表す。

要素形状は、近似的にサブパラメトリック要素としたのに加え、圧縮成分 Φ^c によっても要素体積は不変と仮定する。

固体は一般に圧縮性 ($\nu > 0.5$) で、圧縮成分 Φ^c を伴い、法線応力は $G\nabla(\Phi + \Phi^c)$ で表され、体積ひずみが生じるが、要素形状は変わらない、とするものである。

非圧縮仮定の流体との連成計算で、矛盾が生じないため、でもある。（[付録1] 参照のこと。）

(4) 圧縮材料要素の仮想仕事式

非圧縮性・圧縮性の材料に関わらず、非圧縮計算は必須である。（特解の計算には一般解を加えるので。）

圧縮材料の変位 \mathbf{u} は式(4)で計算する。

$$\mathbf{u} = (\Phi + \Phi^c) + \Psi \quad (4)$$

圧縮成分 Φ^c は、荷重下の式(5)で計算する。

$$G((1-2\nu)\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla^2(\Phi^c + \Phi)) = \mathbf{0} \quad (5)$$

非圧縮の仮想仕事式は、式(6)の積分式で計算する。

$$\int_{\Omega} \delta \Psi \cdot G \nabla^2 \Psi d\Omega = \mathbf{0} \quad (6)$$

(3) 遷移行列と状態ベクトル

要素関数を有限Taylor級数で表し、勾配項 $\nabla \mathbf{u}, \nabla \nabla \mathbf{u}, \dots$ の係数(パラメータ)に剛性 G を乗じて $\nabla \mathbf{F}, \nabla \nabla \mathbf{F}, \dots$ で表したベクトル $\{\mathbf{u}, \nabla \mathbf{F}, \nabla \nabla \mathbf{F}, \dots\}_0$ を、遷移行列法では“状態ベクトル”と呼ぶ。

したがって、局所原点の応力ベクトル $\{\boldsymbol{\tau}, \nabla \boldsymbol{\tau}, \dots\}_0$ は状態ベクトルの結合式で表される。

ひずみベクトル $\{\boldsymbol{\gamma}, \nabla \boldsymbol{\gamma}, \dots\}_0$ はTaylor級数の勾配ベクトル $\{\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \nabla \nabla \mathbf{u}, \dots\}_0$ の結合式で表される。

(4) 異種材料要素間の仮想仕事式

要素内では単一材料とする式(6)は、要素表面一周積分形の式(7)でも表せる。

$$\int_{\partial \Omega} \delta \Psi \cdot G \nabla \Psi \partial \Omega = \mathbf{0} \quad (7)$$

異種材料要素の要素間境界積分式(7)は、界面法線方向と並行方向で使い分ける必要がある。

界面法線方向は、応力が連続するとする、式(8)で表すべきである。

$$\int_{\partial \Omega_n} \delta \Psi \cdot \nabla \mathbf{F} \partial \Omega = \mathbf{0} \quad (8)$$

$\partial \Omega_n$ は界面法線方向を表している。

界面並行方向は、応力に関わりなく、変位が連続すべきである。したがって変位勾配も連続すべきである。

並行面を $s_1 - s_2$ とし、微小面を $\partial \Omega_s$ で表せば、異種材料間であっても、式(9)で表すべきである。

$$\int_{\partial \Omega_s} \delta \Psi \cdot \nabla \Psi \partial \Omega = \mathbf{0} \quad (9)$$

変分行の数は式(4)や式(7)と同じであるが、ひずみ要素と状態量要素を用意して、使い分ける必要がある。

前者はノードの勾配パラメータが $\{\nabla \Psi_i\}_k$ であり、後者は $\{\nabla \mathbf{F}_i\}_k$ である。

(5) 准C1級有限要素

3重1次要素は要素間境界に、両要素の応力差としての、等価な集中反力(内力)の仕事量が、外力の仕事量と、系全体で平衡する。

ここには、はじめに述べた准C1連続要素で、混合変分法を示す。

要素関数は有限Taylor級数で表し、 Ψ_i 要素関数の係数項ベクトルは式(7)の32成分より成る。

状態量要素の係数項ベクトルは、式(7)の $\{\Psi_i^{(000)}\}_0$ 成分のみそのまま、他の成分は $\{\mathbf{F}_i^{(lmn)}\}_0 \equiv \{G\Psi_i^{(lmn)}\}_0$ で置き替えて表す。

いずれも頂点ノードパラメータに変換して表す。

したがって状態量要素は、その頂点ノードのパラメータも $\{\Psi_i^{(000)}, \nabla \mathbf{F}_i\}_k$ で表すものである。

$$\begin{aligned}
& \{\Psi_i^{(000)}, \Psi_i^{(100)}, \Psi_i^{(200)}, \Psi_i^{(300)}, \\
& \Psi_i^{(010)}, \Psi_i^{(110)}, \Psi_i^{(210)}, \Psi_i^{(310)}, \\
& \Psi_i^{(020)}, \Psi_i^{(120)}, \\
& \Psi_i^{(030)}, \Psi_i^{(130)}, \\
& \Psi_i^{(001)}, \Psi_i^{(101)}, \Psi_i^{(201)}, \Psi_i^{(301)}, \\
& \Psi_i^{(011)}, \Psi_i^{(111)}, \Psi_i^{(211)}, \Psi_i^{(311)}, \\
& \Psi_i^{(021)}, \Psi_i^{(121)}, \\
& \Psi_i^{(031)}, \Psi_i^{(131)}, \\
& \Psi_i^{(002)}, \Psi_i^{(102)}, \\
& \Psi_i^{(012)}, \Psi_i^{(112)}, \\
& \Psi_i^{(003)}, \Psi_i^{(103)}, \\
& \Psi_i^{(013)}, \Psi_i^{(113)}\}_0
\end{aligned} \quad (7)$$

(6) 新しいLocking-free法

dHd 法は, 9 自由度数の $\nabla \mathbf{u}$ を, 9 以上の条件式で解く, Locking-free法である.

回転 $curl$ は流れ関数 Ψ を介して, 鏡面像ごとに計算して行く.

その共役変数の $\langle shru \Rightarrow 0 \rangle$ は, Cauchy-Riemann (C.-R.) の関係式の, 横成分式である.

C.-R.の縦成分式は法線応力の差で表される. したがって 45° 座標回転系のせん断ひずみ ($\times 2$) に等しく, “せん断ひずみは方向の如何に拘わらず最小化すべし” とするのがC.-R.の関係式である.

ここには式(7)に, 新たに項を加えて(略)完全4次関数として, 方向の如何に拘わらずせん断ひずみを最小化する, 新しいLocking-free法を提示する. (別報[4]では不完全1次の3重1次関数要素の場合, を示している.)

新たに加える項は,

$$+ \{\Psi_i^{(400)}, \Psi_i^{(040)}, \Psi_i^{(004)}, \Psi_i^{(220)}, \Psi_i^{(022)}, \Psi_i^{(202)}\}_0$$

の6成分である.

ノードパラメータは重心に, 6成分に対応する自由度数の,

$$+ \{\Psi_i^{(100)}, \Psi_i^{(010)}, \Psi_i^{(001)}, \Psi_i^{(110)}, \Psi_i^{(011)}, \Psi_i^{(101)}\}_k$$

を設定する.

これらパラメータの変分でデカルト座標系のせん断と, 3軸それぞれの周りの, 45° 回転座標系のせん断の最小化 (C.-R.の縦成分) 式を, 仮想仕事式に加えて, 解いて行く.

(7) 形状要素のポテンシャル表示

形状要素はポテンシャル Φ で表示する. Φ は流通座標で表し, 粒子・セルは流線上を移動し, 頂点ノードのパラメータ初期値は $\{\Phi\}_k = 0$ とする. ([付録2] 参照のこと.)

すなわち, 流通座標値が当該粒子の位置 \mathbf{X}_p であり, シミュレーション初期(静止時)には当該座標値を設定する.

流線上のLagrange座標表示の粒子変位 $\mathbf{u}(s, n, \zeta)$ の, 流通座標表示 $\mathbf{u}(x, y, z)$ は $= \Delta \Phi \nabla \Phi$ である.

要素形状の軌跡長さが Φ であり, デカルト座標点で表す. ($\{\Phi\}_k$ も軌跡長さを表す.)

ノード k の Φ の値は流線座標 $\{s, n, \zeta\}_k$ でも表す. (s 方向が流線方向.)

UC 内の Gauss 数値積分点の Φ 値を, 3重1次関数で補間して表す.

反復計算は2重とし, 外側反復計算後は仮想時間を Δt 進める. 内側反復計算は非線形項に対するNewton-Raphson法の反復である.

Δt 後(時間ステップ $n+1$) の Φ は物質微分で, 下流点の値 Φ として計算する. (*i.e.*; $\Delta u = \Delta t \Phi \nabla \Phi$)

ただ, 応力によりひずむ(拡散する)ので, 非圧縮であっても, 要素体積は一般には変化する.

そこで $n+1$ の予測子 $\{\Phi\}_k^{n+1}$ を, Coulombゲージを弱形式で満たすよう修正して行く.

3. $\nabla \psi - \nabla \Psi$ 法

(1) 概念

上述までが, 本稿の目的とした“混合変分法”の提示と, “共役変数”の概念によるCauchy-Riemannの関係式への対応法である.

Helmholtz分解はポテンシャルの, 勾配でベクトル場を表示する方法である.

したがって切片は $\langle \{\varphi^{(000)}\}_0 = 0, \{\psi_i^{(000)}\}_0 = 0 \rangle$ として固定できる筈である.

その開発がHelmholtz分解に関する本研究の長い間の目標でもあった. 本稿をまとめる途上で, その要素を発想した. 機会があれば, 詳細を報告したい.

ただ著者に, 余齡から推してその機会が在るとは限らないので, ここには概要を記して置く.

適用法の問題は, 変位・速度を(したがって加速度項も) $\nabla \psi$ 要素で表し, 応力項・拡散項は $\nabla \Psi$ 要素で表して, 交互に計算して行く, とするものである.

いずれもCoulombゲージを満たして行く必要があり, 反復計算となる.

(2) C1級勾配要素

C^1 連続な φ 要素の例で示す. 3重3次関数, 64項から成る要素である. ($\varphi, \psi_i, \Phi, \Psi_i$) いずれも同じ関数形である.

頂点ノード k には, 8成分のパラメータベクトル:

$$\{\varphi^{(000)}, \varphi^{(100)}, \varphi^{(010)}, \varphi^{(001)}, \varphi^{(110)}, \varphi^{(011)}, \varphi^{(101)}, \varphi^{(111)}\}_k$$

が設定されている.

その内の, $\{\varphi^{(000)}\}_k \times 8$ つを局所原点(重心)に移し, 偶々同じパラメータベクトルとなるが,

$$\{\varphi^{(000)}, \varphi^{(100)}, \varphi^{(010)}, \varphi^{(001)}, \varphi^{(110)}, \varphi^{(011)}, \varphi^{(101)}, \varphi^{(111)}\}_0$$

を設定する．かつ，切片を $\{\varphi^{(000)}\}_0 = 0$ とする．

上述までで， $\nabla\varphi$ 勾配要素を構築できた．

パラメータ $\{\varphi^{(111)}\}_0$ は，その自由度で $\varphi^{(111)}$ の要素内分布を最小化する．

ゆがみパラメータ $\{\varphi^{(110)}, \varphi^{(011)}, \varphi^{(101)}\}_0$ も同様に，それぞれの要素内ゆがみ分布を最小化する．

残る勾配パラメータ $\{\varphi^{(100)}, \varphi^{(010)}, \varphi^{(001)}\}_0$ は，式形のアナロジーで Cauchy-Riemann の縦成分式を，数値的に満たして行く．

(3) 准C1級勾配要素

32項から成る，准C'連続要素の場合もほぼ同様にして勾配要素を得る．

(4) 不完全3次(セレンディピティ)要素

勾配が不完全2次のセレンディピティ要素を適用する．

したがって， φ が不完全3次のセレンディピティ要素である．

($\varphi, \psi_i, \Phi, \Psi_i$) いずれも同じ関数形であり， φ の例で示す．

まず，頂点ノード k にパラメータ $\{\varphi^{(000)}\}_k$ を含む，不完全4次の φ 要素を考える．

その関数の係数ベクトルは式(8)で表され，44成分で構成される．

$$\begin{aligned} & \{\varphi^{(000)}, \varphi^{(100)}, \varphi^{(200)}, \varphi^{(300)}, \varphi^{(400)}, \\ & \varphi^{(010)}, \varphi^{(110)}, \varphi^{(210)}, \varphi^{(310)}, \varphi^{(410)}, \\ & \varphi^{(020)}, \varphi^{(120)}, \\ & \varphi^{(030)}, \varphi^{(130)}, \\ & \varphi^{(040)}, \varphi^{(140)}, \\ & \varphi^{(001)}, \varphi^{(101)}, \varphi^{(201)}, \varphi^{(301)}, \varphi^{(401)}, \\ & \varphi^{(011)}, \varphi^{(111)}, \varphi^{(211)}, \varphi^{(311)}, \varphi^{(411)}, \\ & \varphi^{(021)}, \varphi^{(121)}, \\ & \varphi^{(031)}, \varphi^{(131)}, \\ & \varphi^{(041)}, \varphi^{(141)}, \\ & \varphi^{(002)}, \varphi^{(102)}, \\ & \varphi^{(012)}, \varphi^{(112)}, \\ & \varphi^{(003)}, \varphi^{(103)}, \\ & \varphi^{(013)}, \varphi^{(113)}, \\ & \varphi^{(004)}, \varphi^{(104)}, \\ & \varphi^{(014)}, \varphi^{(114)}\}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

頂点ノードのパラメータベクトルは4成分の $\{\varphi^{(000)}, \varphi^{(100)}, \varphi^{(010)}, \varphi^{(001)}\}_k$ であり，中間に辺(稜線)方

向の2階微分のパラメータを設定する．(パラメータ合計は $4 \times 8 + 12 = 44$ ．)

次いで，頂点のパラメータ $\{\varphi^{(000)}\}_k \times 8$ つの自由度を局所原点(重心)に移し，同じ8成分のパラメータベクトル $\{\varphi^{(000)}, \varphi^{(100)}, \varphi^{(010)}, \varphi^{(001)}, \varphi^{(110)}, \varphi^{(011)}, \varphi^{(101)}, \varphi^{(111)}\}_0$

で表す．かつ，切片を $\langle \{\varphi^{(000)}\}_0 = 0 \rangle$ とする．

よって，勾配要素 $\nabla\varphi$ 得た．

残りの成分の内 $\{\varphi^{(111)}\}_0$ の自由度で，要素内の $\varphi^{(111)}$ 分布を最小化する．

ゆがみ $\{\varphi^{(110)}, \varphi^{(011)}, \varphi^{(101)}, \varphi^{(111)}\}_0$ も同様に，それぞれのゆがみ分布を最小化する．

残る勾配パラメータ $\{\varphi^{(100)}, \varphi^{(010)}, \varphi^{(001)}\}_0$ は，式形のアナロジーで Cauchy-Riemann の縦成分式を，数値的に満たして行く．

4. 補ひずみエネルギー法の考察

変位法はひずみエネルギー最小化法に基づいている．

補ひずみエネルギー法は応力法とも呼ばれる．

運動エネルギー式，或いはポテンシャルエネルギー式残差分散 $(\mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{F})^2$ を，

最小化 $\langle 1/2 (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} + \mathbf{u} \cdot \delta \nabla^2 \mathbf{F}) \Rightarrow 0 \rangle$ する方法である．()内第2項の最小化が，補ひずみエネルギー最小化である．

()内のいずれも，要素内を積分(要素間境界まで)すれば， C^0 連続要素では隣接要素との間に応力差が生じる．著者はそれを“等価集中力(ECF)”と呼んでいる．[5]

外力と弱解(積分値)で平衡する反力(内力)である．(吊り橋の吊り力が，それである．)

$\nabla^2 \mathbf{F}$ の積分定数(の積分値)を，弱形式で表したものである．

ECFは部分積分項であり，両要素それぞれ累次部分積分すれば， $\langle 1/2 (\delta \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{F} + \nabla \mathbf{u} \cdot \delta \nabla \mathbf{F}) \Rightarrow 0 \rangle$ (の要素内積分)となる．

部分積分時の積分定数が，要素間境界応力である．

上述の要素内積分を累次進めれば，ひずみエネルギー変分項 $\delta \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{F}$ の $\delta \nabla \mathbf{u}$ は， \mathbf{u} のTaylor級数をトップダウンする形で微分して行くことになる．

$\nabla \mathbf{F}$ はその逆に，ボトムアップする形の積分となる．

連続桁の遷移行列法も，開発当初はボトムアップで誘導していたが，現時点では(少なくとも著者は)トップダウンで誘導している．

前者は順次積分定数が顕れて来る．後者は，局所原点の導関数ベクトルを積分定数(ベクトル)とする．

上述は，補ひずみエネルギー変分項 $+\delta \nabla \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{u}$ でも同様に展開する．

その際重要な点は， $\delta \nabla \mathbf{F}$ をノードパラメータで変分す

ることである。

したがってこの点でも、有限要素法がノードパラメータ表示法たるものが、補ひずみエネルギー法計算のポイントとなる。

ノードパラメータ表示を可能とする根本的な理由は、最小領域(有限要素)を連続体表現することに在る。

C^1 連続要素では、要素間境界で応力が連続すべき境界面と、ひずみが連続すべき境界面が在ることを、本稿では指摘した。

5. まとめと今後の課題

本稿では、剛性が極端に異なる要素で構成される系の解法を検討した。極端には、剛性無限大の要素を含む系の解法である。

それには遷移行列有限要素法しか対応できない。

本稿はまた、離散Helmholtz分解要素法研究の一環でもある。

粒子の軌道(流線)を Φ で表し、かつ流通座標で表す。変位は $\mathbf{u} = \Delta\Phi\nabla\Phi$ で表す。

$\nabla\Phi$ は境界面並行方向は連続で、法線方向不連続なので、剛性の異なる要素間では、前者はひずみを連続させ、後者は応力を連続させるべき、とするのが“混合変分法”の結論であり、予見であった。

今後の課題は皆様に、実務に活用して頂くことである。

[付録 1] 離散Helmholtz分解(dHd)表示法

任意のベクトル場 \mathbf{V} を、次式で分解表示する。

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi^C + \nabla^1\Psi \quad (\text{div}\Psi = 0, \nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi) \quad (a)$$

$\nabla\Phi$ は縦成分の内の、非圧縮成分であり、 $\nabla\Phi^C$ は圧縮・膨張成分である。($\nabla^1\Phi = 0, \nabla^1\Phi^C \neq 0$)

$\nabla_{diag}\Psi$ は、 $\nabla\Psi$ の対角成分を表すとする。Coulombゲージにより自明であるが、念のため ($\nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi$) とした。

$\nabla^1\Psi$ は、総和規約に従う表示 $\partial\Psi_i/\partial x_j$ を表す、とする。すなわち $\nabla\Psi$ の行和で表すベクトルである。

\mathbf{V} はひずみベクトル場を表すとして、変位ベクトル場 \mathbf{u} は次式で表す。

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi^C + \nabla^1\psi \quad (\text{div}\psi = 0, \nabla_{diag}\psi = \nabla\varphi) \quad (b)$$

更に、ポテンシャルベクトル場 ψ は次式で表すとする。

$$\psi = \nabla v^C + \nabla^1\lambda \quad (\text{div}\lambda = 0, \nabla_{diag}\lambda = \nabla v) \quad (c)$$

$\Phi^C = \nabla^2 v^C, \Phi = \nabla^2 v$ などの関係が在る。

他のベクトル場も、同様に表示して行く。

[付録 2] 流線上移動粒子の流通座標表示と回転

Φ は流通座標で表し、モデル粒子の Φ は、流れ場では流線上に在る。(定義では、質量粒子の軌跡が流線。)

Φ は流線の長さであり、流通座標値の変化は $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{u}$ である。

ここでは固体のベクトル場も表す意味を込め、かつ離散表示する意味も込めて、流線を“粒線”とも呼ぶ、とする。

つまり、1 粒子の Φ のLagrange座標を流通座標で表す。或いは1 粒線を流通座標で表す。

粒子-メッシュ法では、粒線群を流通座標表示し、粒線群を、有限要素関数で補間して連続表示する。

粒線の接線方向、および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を、粒線座標(Lagrange座標)とすれば、横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力としても表れる。

ただ、粒子の自転は接線軸周りのみではなく、他の軸周りもある。そこで $\text{curl}\Psi$ も流通座標で表す。

1 粒子の流通座標を \mathbf{X}_p で表し、初期(静止時)座標を \mathbf{X}_0 で表すとする。

$\nabla\Phi$ も流線座標で表した勾配となる。

dHd では $\nabla\Phi = \nabla_{diag}\Psi$ で表すとした。 Φ のデカルト座標上の増分である。つまりは方向余弦であり、 Φ は非圧縮を表すとしているので、 $\nabla^1\Phi = 0$ である。

$\nabla\Phi$ は法線ひずみ(のデカルト座標表示)であり、相対量である。

静止時からの Φ の、方向別増分は $\Phi\nabla\Phi$ である。

時間ピッチ Δt 間の増分を $\Delta\Phi$ とすれば、 Δt 間の流通座標の増分: $= \mathbf{u}$ (非圧縮変位)であり、 $\mathbf{u} = \Delta\Phi\nabla\Phi$ である。

体積変化の増分は $\Delta\Phi^C\nabla^1(\Phi + \Delta\Phi^C)$ とし、一般解 $\nabla^1\Phi = 0$ を加えて表す。

$\Delta\Phi\nabla\Phi$ は座標回転して $= \mathbf{u}(s, n, \zeta)$ (:非圧縮, Lagrange 座標. s が接線方向.) でも表す。

dHd では $\nabla_{diag}\Psi = \nabla\Phi$ と定義したので $\Delta\Phi\nabla_{diag}\Psi = \mathbf{u}$ であり、 Ψ のTaylor展開1次の項 $\langle \Delta\mathbf{X}_p \cdot \nabla\Psi \rangle$ を速度表示 $\langle = \Delta t\Psi \cdot \nabla\Psi \rangle$ して、縦成分 $\langle = \Delta t\Psi_i \nabla_{diag}\Psi \rangle$ に着目すれば、 $\langle \Delta t^2\Phi^2 = \Delta t^2(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2) \rangle$ であり、 Φ は接線方向速度である。

(速度 Φ の) $\Delta t\Phi\nabla\Phi$ が $\Delta\mathbf{X}_p/\Delta t = \mathbf{u}_p/\Delta t$ である。

デカルト(Eulerian)座標型では $\langle \mathbf{U}_i = \Psi_j \nabla\Psi_i \rangle$ であり、非定常では加速度項を加えて物質微分表示する。

流線(Lagrangian)座標型でも、流通座標表示では、同様である。

粒子自身は $\text{curl}\Psi$ 分自転する。正確には $\text{shr}\Psi$ 分小さく公転しながら自転する。

$\Delta\Phi\nabla\Phi = \mathbf{u}$ は流通座標で表示するとしたが、変位に追従して表す座標(粒線座標)であり、固体では有限変形理論の変位に追従して表す“有限変位座標”とも呼べよう。

有限変位座標表示の有限変位ベクトル $\Delta\Phi\nabla\Phi$ は、非線形であることに留意する。

準静的载荷の仮想時間 Δt 後には、時間ステップを $n = 0, 1, 2, \dots$ として、 $\mathbf{u}^{n+1} = (1 + \Delta t)(\Delta\Phi\nabla\Phi)^n = (\Delta\Phi\nabla\Phi)^{n+1}$ であり、離散計算では仮想時間 Δt は小さいほど、当然乍ら、粒線を精度高く表せる。

任意のベクトル場を表すとする dHd では、 $\mathbf{u} = \nabla^1\psi$ である。（ただし、in case ($\text{div}\psi = 0$).）

渦度の表示に関しては次の通りである。

上述で、回転 $\text{curl}\Psi$ もデカルト座標で表すとした。

$\text{curl}\Psi_3$ が x - y 鏡面上の、流れ関数表示の渦度である。

ただし、 Ψ_3 は本来3D表示であり、2Dでは z 軸方向は剛体 ($\partial\Psi_3/\partial z = \partial w^\#/\partial z = 0$) であるが、スライスした x - y 鏡面上の像は z 軸方向に、パラパラ漫画の如く変動する。

それを、小さく公転しながら自転する、と表現した。

3Dの $\partial\Psi_3/\partial z \neq 0$ 分が公転で、 $\langle \partial\Psi_3/\partial y - \partial\Psi_3/\partial x \rangle$ 分が自転(渦度・剛体回転)である。

地球の公転が粒線とすれば、月は地球の周りを小さく公転しながら、自転する、と考える。

小さな公転を $\text{shr}\Psi$ で表し、自転を $\text{curl}\Psi$ で表示するものである。（月の裏側は、地球からは見えない。）

かつ、 Ψ_3 の z 軸周り x - y 鏡面像のみではなく、 Ψ_1, Ψ_2 の小さな公転・自転も在り、複雑に回転する。

参考文献

- [1] 今村: 准C¹連続な応力ポテンシャル要素で表す粒子一直交格子法による混相流モデル, 第36回「数値流体力学シンポジウム」, 2022.
- [2] 今村: 粒子・“メッシュ法”による固体の数値解法, 計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [3] 今村: 自然座標系粒子運動の遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解による解法, 計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [4] 今村: 離散Helmholtz分解に基づくLocking-free有限要素法, 計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
- [5] Imamura, J.: Finite patch element method, XFEM2009 / Aachen, 2009.