計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　計算工学会

有限要素応力法：適合条件式解法，並びに変位法への統合

Finite element force method: Solution of the compatibility conditions, and integration into the displacement method

今村純也[1)]

Junya Imamura

1) 博(工) *imi*計算工学研究室（〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp)

This report is part of research regarding Helmholtz theorem, to apply the Helmholtz decomposition (*H-d*) to the finite element method. *H-d* is, however, in a certain coordinate expression. I proposed an improved *H-d* expression called *dHd*. The *dHd* includes *H-d* and other coordinate expressions. That is a multidirectional FEM concept. The objective of this report is to propose a scheme for the force method. The force method for framework is constructed using statically determinate main frames, but can also allowed to use indeterminate frames to represent the deformations on nodes to continue to other main frame. In the same way, finite element can represent the node deformation to continue to other element by presentation of the node parameters. But the indispensable condition is to determine the slice, and to satisfy Coulomb gauge, that is to satisfy the mass conservation law.

Key Words: *Force method, Frame work force method, Finite element force method, Transfer matrix method, State vector*.

1.　背景と目的

(1) 背 景

本稿は“Helmholtz分解に基づく連続体理論の有限要素法への適用に関する研究”の一環としての，応力法スキームの提案である．

川井は，有限要素法と言えば変位法を指すと認識されるに至っている，として応力法の必要性を，下界解を与える解法として，変位法の上界解を与えるスキームと共に，挟み撃ちの概念による検討法確立のため，応力法スキームを先ず確立すべき，と唱えている．[1]

川井によれば1956年，アメリカのボーイング社により創生された直接剛性法（Direct Stiffness Method）が後年，有限要素法と呼ばれ，同年のIBMの新しい計算機の出現に支えられ，急速に広まった，としている．

著者は同時代の1968年から，ドイツHannover 工科大（T.H. Hannover）で，遷移行列法の線材架構（framework）への適用法開発に従事した．（その成果は後年，共同研究者のE. Knophによる報告書にまとめられている．[2]）

変位法並びに応力法との比較で，遷移行列法のメリットを組み込む狙いの研究・開発である．当時，多くの研究者から，応力法研究論文も発表されていて，検討した．

結論として，静定基本架構（das statish bestimmte Haupt-system，またはGrundsystem）の，設定の困難さに起因して，応力法スキームは確立できない，とした．

Helmholtzの定理[3]に基づく分解法は，任意のベクトル場を分解できる，とする．

したがって，変位ベクトル場を分解表示できる他，ひずみベクトル場・応力ベクトル場，更にはポテンシャル・ベクトル場も分解表示できる．

ただし，いずれも積分定数としてのポテンシャル（関数の切片に相当）は，局所の系（有限要素自身）の安定のためにも必要である．（切片=0 であっても必要．）

近時，それは法力法の静定基本架構にも，同様に要求される条件である，ことに気付いた．

したがって，応力法は応力のみを未知数とするのではなく，切片 $\boldsymbol{u}_0$ を含む状態量ベクトル $\{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\sigma}\}$ を未知数とすべき，ことに気付いたのである．

それにより，応力法スキームを容易に確立できた．

(2) 目 的

応力法は，応力を未知数とし，適合式で連立方程式を組む概念の方法である．

線材架構での従来の静定主架構は，関数の切片は支持点で，（ゼロ値を含めて）Dirichlet境界値で与えている．

したがってDirichlet境界の無い静定主架構の，例示としても，計算例は知らない．（トラス架構の例も無い．）

それを，切片を未知数（パラメータ）で表して，連立方程式の未知数ベクトルに加えて，その成分のひとつとし，一般化した応力法スキームの形で示す．

線材架構の応力法は省略し，本稿では，有限要素応力法を提示する，ことを目的とする．

ただ，適合条件式を解く方法であり，未知数・変分は応力パラメータに限る必要はない．

その理由・根拠は，最小領域（単位）としての線材架構の静定主架構内は（有限要素内も）連続体理論で応力・変位は誘導される，からである．

(3) 補ひずみエネルギー最大化法による応力法の課題

最大補ひずみエネルギー法が応力法とされる.

上述よりすれば, 補ひずみエネルギー法には, 何らかの形で変位（切片 $\boldsymbol{u}_0$ ）を系に組み込むための，変分式が必要である.

最小の系は有限要素であり, 安定系であるためには, 何処かで基本境界条件（Essential boundary condition）を組み込む必要がある，とするものである.

更に，１次元線材架構の応力法では条件とならなかったCoulombゲージ式が,２次元以上では満たすべき条件式となる.

結論は, Coulombゲージに密度を乗じた質量保存式を付帯させて，補ひずみエネルギー法を解けばよい.

(4) 変位法への統合

繰り返すが，切片 $\boldsymbol{u}_0$ は系（有限要素）の何処かで基本境界条件として不可欠である.

その上で，ノードの応力パラメータも可能である.

しかし, 応力パラメータに代えて, 変位のパラメータでも可能, とするものである.（適合条件式を解く条件で.）

その説明は次の章の, 遷移行列による“状態ベクトル法”の節で述べる.

上述の意味（適合条件式解法）で, 応力法は変数・変分法としては, 変位変分法へ統合できる，とするものである.

少なくとも剛性を要素内一定とすれば，応力法は変位変分法で完全に代替できる.（要素内で剛性変化する要素に関しては，ここでは議論しない.）

課題は，隣接要素どうしの剛性が大きく異なるケースである.

同一剛性の問題は変位法で，多少の数値Lockingは許容するとして，実績もあり，尊重すべきである.

要するに, 剛性の大きく異なる要素間を, 安定計算する方法の開発が目的となる. その極端として, 剛性無限大の要素も可能，でなければならない.

気・液界面では, 気体は応力を未知数として液体界面に適合させたい．応力法を必要とするsituationである．（液体はその逆なので，変位法で可．）

その適合条件を応力パラメータ，または変位パラメータで満たして行く方法，を示すものである.

(5) 補ひずみエネルギー法の一案

本OSの別報2題[4][5]も，隣接要素どうしの剛性が大きく異なるケースに関する，別の視点からの検討である.

本稿, およびそれらの検討結果として, 補ひずみエネルギー法スキームの一案に到った.

それを“最小ひずみエネルギー・最小補ひずみエネルギー法“ として，第3章に提示する．（ハイブリッド法）

2.　方法いろいろ

(1) 応力法とは

変位法はノード変位を変数として，有限体積法で平衡式を解く，或いは仮想仕事式をノード変位パラメータの変分式で解く，として確立されている．（後者はGalerkin法, 或いは広い意味で“重み付き残差法”とも呼ばれる.）

応力法はそれに対し, 適合式を解く方法, であることは明らかであるが, 変数をノード応力とする必要性は, 必ずしも無い，ことは はじめ に述べた.

本稿でテーマとした応力法は, 有限要素法以前の, 静定主架構をベースとする原始の応力法であった.

ただ, 補ひずみエネルギー法を“応力法”と称していることが，混乱の一因となった.

有限要素法以降の，後発の“補ひずみエネルギー法”は“応力パラメータ変分法”，或いは“仮想応力法”などとし，原始の応力法とは区別する必要がある.

両者が一致するのは, 前述のように, いずれも基本境界条件の設定を必要とする点である.（連続体の有限要素離散化が可能なら, 翻って, 連続体としての不静定主架構も可．要は，連続させるべき他の系との間の，ノードパラメータ表示法．）

(2) 有限要素法のポイント

有限要素法のポイントは係数項を，項数と同数のノードパラメータで表すことに在る.

項数より多いノード数設定も可能である. かつ, 変位パラメータと応力パラメータの混在も可能である.

後者の場合，最小2乗法（回帰式）で変換する必要があり, 変位と応力パラメータそれぞれに重みを付け，重み付き回帰式による必要がある.

有限要素法は，係数ベクトルの成分数（項数）とノードパラメータ数を同数とすることで，重みを1.0として，要素間適合条件（C1級要素では応力も）を100 % 満たす技法を採る, ものである. それが有限要素法の最大のポイント, である.

繰り返しになるが，有限要素法がノードを介する方法を採る理由は，その点に在る.（それにより，C1級要素が可能となる.）

本稿での応力法は関数を，後述の“状態ベクトル”で表し, 適合条件式の連立方程式を解いて行くが, 適合条件式数はベクトル成分数と同数とし, 上述の, 有限要素法の最大のポイント（重みが1.0）を採り入れる.

(3) 遷移行列

有限 Taylor 級数の係数ベクトル $\{\boldsymbol{u}, \nabla\boldsymbol{u}, \nabla\nabla\boldsymbol{u}, \cdots\}_0$ の, 勾配成分（ひずみレベル）以上の導関数成分に，剛性 G を乗じて応力成分 $\mathbf{F}$ を表した $\{\mathbf{Z}\}_0 \equiv \{\boldsymbol{u}, \nabla\mathbf{F}, \nabla\nabla\mathbf{F}, \cdots\}_0$ を, 本稿では“状態ベクトル”と呼ぶ.

点 a の状態ベクトルを，点 b へ遷移させる行列 $[\mathbf{T}]$ を遷移行列と呼ぶ.（b を a に還元する, 還元行列とも言う.）

すなわちノード k の状態ベクトルは, 式(1)で表される.

$$[\mathbf{Z}]_k = [\mathrm{T}]_k \cdot [\mathbf{Z}]_0 \qquad (1)$$

双1次要素の例では，遷移行列 $[\mathbf{T}]$ は式(2)となる.

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & x/\mathrm{G} & y/\mathrm{G} & xy/\mathrm{G} \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(4) 状態ベクトル法

状態ベクトルで表して解いて行くスキーム，について示す.（応力法と同等，として示すものである.）

頂点ノードの1点を原点として, 変位 $\{u_i\}_0$ を固定し, 残りのベクトル成分で最小ひずみエネルギー : 式(3) を計算する.（）

$$\int_\Omega [\ \delta\{\nabla\boldsymbol{u}, \nabla\nabla\boldsymbol{u}, \cdots\} \cdot \{\nabla\mathbf{F}, \nabla\nabla\mathbf{F}, \cdots\}^T] d\Omega = 0 \qquad (3)$$

固定した変位 $\{u_i\}_0$ はパラメータとし，残りの頂点ノード $\{u_i\}_k$ は遷移行列式(4)で表す.

$$\{u_i\}_k = [\mathrm{T}_1]_k \cdot \{\mathbf{Z}\}_0 \qquad (4)$$

双1次矩形要素の，1 の頂点ノードを共有する要素数を 4 要素とすれば，適合条件式数は =4 である.

要素 j 番の当該ノードの変位を $\{u_i\}_{k,j}$ として, 例えば,

＜ $\{u_i\}_{3,1} - \{u_i\}_{4,2} = 0$, $\{u_i\}_{4,2} - \{u_i\}_{1,3} = 0$,
$\{u_i\}_{1,3} - \{u_i\}_{2,4} = 0$, $\{u_i\}_{2,4} - \{u_i\}_{1,3} = 0$ ＞ である.

ただし，パラメータ(未知数)は $\{\mathbf{Z}\}_0$ である.（為念.）

式(3)のパラメータに $\{u_i\}_0$ を加えた状態ベクトルの, 系全体のパラメータ数と条件式数は，境界条件下では等しいので，連立方程式は解くことができる.

Neumann境界では，適合条件の1つは無し，とし，その適合条件式の1の $\{u_i\}_{k,j}$ を $\{\sigma_i\}_{k,j}$ で(同様に $\{\mathbf{Z}\}_0$ で表して)置き替える.

上述のパラメータ $\{\mathbf{Z}\}_0$ は有限要素法の手順で, 変位パラメータ $\{u_i\}_k$ で表すこともでき, また $\{u_i\}_0$ と $\{F_i\}_k$ で表すこともできる.

(5) 遷移行列法の要素でしか表せない特性

遷移行列法は2つの特徴(特長)を有す.

ひとつは連続桁を代表例として, 開いた系（ツリー状の系）が容易に解ける点である.（閉じた系は，ネットワーク状の系.）

いま一つは，剛域が容易に表せる点である.

前者は，バンドマトリックス状の連立方程式が解き易いことと同じである.

バンド状の部分のみsweep out 法で掃き出して置けば，閉じた系でも，残る後退計算用の係数行列で解けばよい.

sweep out に代わり，遷移行列を使えば，よりエレガントに，閉じた系にも部分的に活用できる.

特長の後者は，剛な要素では，変位と応力のcoupling 行列† が自動的に組み込める点に在る. それが状態ベクトルで表す遷移行列の，いま一つの特長である.

(6) 共役変数の概念

Helmholtz分解はCoulombゲージ($div\boldsymbol{\psi} = 0$)を制約条件とする. 変位ベクトル場では体積保存式である.

2Dでは変位増分の和 : ($\varDelta u + \varDelta v = 0$)を要求するが，それぞれに，桁落ち $|e|$ を含んだ(($\varDelta u + e) + (\varDelta v - e) = 0$)であっても，2DのCoulombゲージを満たす解である.

$|e|$ を排除するため(($\varDelta u + e) - (\varDelta v - e) \Longrightarrow 0$)を同時に制約条件として，($2e \Longrightarrow 0$)とする.

それを共役変数の概念で一般化し，(A+B)の演算には(A-B)を最小化すべし，とし，(A+B) と (A-B) を共役変数と呼んでいる.

3. 最小ひずみエネルギー・最大補ひずみエネルギー法の一案

(1) 補ひずみエネルギー法のスキーム

補ひずみエネルギー変分法は次のようになる.

$\nabla\mathbf{F}$ は渦度を含め, 法線応力・せん断応力の成分である.

補ひずみエネルギー変分式は＜ $\delta\nabla\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{u}\, d\Omega = 0$ ＞ が, 強形式表示である.

弱形式はその定積分形として式(5)で表す.

$$\int_\Omega [\frac{\partial\nabla^2\mathbf{F}}{\partial\{\nabla\mathbf{F}\}_k} \cdot \boldsymbol{u}\ ] d\Omega = 0 \qquad (5)$$

式(5)の $\{\nabla\mathbf{F}\}_k$ は，応力ベクトルを表すノードパラメータである. かつ, ノードパラメータすべてによる変分である.

$\nabla\mathbf{F}$ を計算するための $\{\nabla\mathbf{F}, \nabla\nabla\mathbf{F}, \cdots\}_0$ の項数は, ノードパラメータ数より少ない. したがって，変分項の分子 $\nabla\mathbf{F}$ の項数はパラメータ数より少なく，変分行は互いに独立ではない.（式(7)を部分積分した式の分子 $\nabla\mathbf{F}$ で考える.）

すなわち，$\{\nabla\mathbf{F}, \nabla\nabla\mathbf{F}, \cdots\}_0$ には切片 $\{\boldsymbol{u}\ \}_0$ が含まれない.

よって, 式(5)からは切片 $\{\boldsymbol{u}\ \}_0$ は消えるので, 別途 u_i の式を加えて，式(5)と連立させて解いて行く必要がある.

それに，Helmholtz 分解の視点では不可欠な Coulomb ゲージ式を充てる. 前述のように，体積保存式である.

（密度×Coulombゲージ）ば質量保存式であり，数値計

† 2 点間の$\{w, \theta\}$ および $\{M, Q\}$ のカップリング行列はいずれも $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 棒の $\{u\}$ および $\{N\}$ は, いずれも$[1]$.

算スキームでは，他の2大保存則に先行して満たすべき重要な保存則と考える．（つまり，式(5)に先行すべき条件なので，不可欠である．ひずみエネルギー法も同様．）

変位法スキームでも同様であり，MAC法は圧力ポテンシャルの勾配で満たす．
ここでは，$\nabla\varphi$ を介する方法で満たす．

Coulombゲージを満たすと同時に，共役変数の最小化が必要であり，そのスキームを示すものである．（$\Delta t\nabla$P を介するMAC法も同様に，共役変数の最小化が必要．）

Coulombゲージも 共役変数最小化式も，同時に満たすにはいま一つ独立した変数の 勾配： $\nabla\varphi$ を介する必要があり，式(6*a*)と(6*b*)で両式を満たして行くものである．

$$\int_\Omega [\nabla\varphi\cdot(\nabla\varphi-\boldsymbol{u}^{m-1})]d\Omega=0 \qquad (6a)$$

$$\int_\Omega [\,\delta u_i\cdot(2\Delta u_i+\mathrm{R}+\frac{1}{3}\nabla^1\varphi) \\ +\delta u_{i+1}\cdot(2\Delta u_{i+1}-\mathrm{R}+\frac{1}{3}\nabla^1\varphi)]d\Omega=0, \qquad (6b)$$

$$where\quad \mathrm{R}\equiv\frac{1}{2}(u_i-u_{i+1})^{m-1}$$
$$\nabla^1\varphi\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

添え字は，$(i=1,2,3),(i+1=2,3,1),(i-1=3,1,2)$ の順とし，収束するまで反復計算する．（ $u_i^m=u_i^{m-1}+\Delta u_i$ $(m=0,1,2,3,\cdots)$ ）

“Coulombゲージ残差の均等配分法”である．
式(6*b*)では，共役変数：$(u-v),(v-w),(w-u)$ を増分 $\Delta\boldsymbol{u}$ の制約(最小2乗)条件としている．
$\nabla\varphi$ を介して2DごとのCoulombゲージを満たすのに対し，45°回転座標系の $\varphi^{(11)}$ を，$\{u,v\}$ 要素で最小化して行くものである．

(u,v) を分銅として秤に掛けて，平衡するよう分銅を配分する．それを巡回させて，すべて平衡させるもので，一種のバイナリーサーチ計算である．

$\{\boldsymbol{u}\}_k$ による変分行を加えるものであり，外力の仮想仕事量を組み込める，ことともなる．

上述が“応力変分法“の修正版である．
$\{\mathbf{Z}\}_0$ をノードパラメータ $\{u_i\}_k$ で表せば，変位法でも，応力法でも，連立方程式変数は $\{u_i\}_k$ である．

上述は更に，“最大補ひずみエネルギー ＋ 最小ひずみエネルギー“ 法で解くべき，との結論に到った．

つまりC^1 連続，或いは准C^1 連続な遷移行列要素では，混合変分法が必要となるからである．（混合変分法は，前出の別報[3]を参照されたい．）
よって，式(7)で解いて行く．（いわゆるハイブリッド法）

$$\int_\Omega [\frac{\partial\nabla^2\mathbf{F}}{\partial\{\nabla\mathbf{F}\}_k}\cdot\boldsymbol{u}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\{\boldsymbol{u}\}_k}\cdot(\nabla^2\mathbf{F}+\boldsymbol{q})]d\Omega=0 \qquad (7)$$

前述のように，外力 $\boldsymbol{q}$ の仮想仕事も組み込め，加速度項も組み込める．
極端な例は，剛体(G= ∞)でも解ける点，が遷移行列法の特長である．

(2) 補ひずみエネルギー法の考察

式(7)はハイブリッド法と呼ばれる．かつ，補ひずみエネルギー法は最大化法とも言われる．

式(7)は内力(分布の)仕事量と分布外力 $\boldsymbol{q}$ との平衡式，の残差分散の最小化式に同じである．すなわち式(8)である．

$$\int_\Omega [\delta(\boldsymbol{u}\cdot(\nabla^2\mathbf{F}-\boldsymbol{q}))^2\,d\Omega \\ =2\int_\Omega [\,\delta(\boldsymbol{u}\cdot(\nabla^2\mathbf{F}-\boldsymbol{q}))]\,d\Omega \\ =2\int_\Omega [\,\delta\boldsymbol{u}\cdot(\nabla^2\mathbf{F}-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{u}\cdot\delta\nabla^2\mathbf{F}]\,d\Omega=0 \qquad (8)$$

したがって補ひずみエネルギー式も，仕事量分散の最小化を担う最小化式となる．（仕事量分散がgivenなら最大化を意味する．）

式(8)第１項を部分積分すれば，ひずみエネルギー最小の原理に基づく式を得る．(原理であって，定理ではない．)
平衡式: $(\nabla^2\mathbf{F}-\boldsymbol{q})$ の重み付き残差式でもある．
ただ，式(8)第２項を無視しても，予期した結果を得るのは，計算法の何処かで第２項を組み込んでいる筈である．

式(8)第２項は，要素間境界一周積分形に変形すれば，“応力を重みとする適合式”である．
“有限要素変位法”はその適合式を，ノードの変位パラメータを要素間で共有することで 100% 満たして(組み込んで)いる，と上述は解釈できる．

全く同様のことが，第２項を解く補ひずみエネルギー法(適合条件式解法)の場合も，第１項を何らかの形で組み込まなくてはならない，と言える．
それを，最小の系としての有限要素内で，組み込んで行く．
式(6*a*)，式(6*b*)は，変位法にも組み込まなくてはならない，と述べた．
理由は，式(8)第１項の $\nabla^2\mathbf{F}$ (部分積分すれば$\nabla\mathbf{F}$)を計算するための $\{\nabla\mathbf{F},\nabla\nabla\mathbf{F},\cdots\}_0$ には，切片 $\{\boldsymbol{u}\}_0$ が含まれていない，とする論法の延長上に在る．

最小の系としての有限要素では，境界条件はノードパラメータで表し，式(6*a*)，式(6*b*)を加えて式(8)第１項を解く．結果として解は，境界条件のノードパラメータで表さ

れる.

つまり，状態ベクトル：$\{\boldsymbol{u}, \nabla\mathbf{F}, \nabla\nabla\mathbf{F}, \cdots\}_0$ は，ノードパラメータで表される.

それで，式(8)第２項の適合条件式を表し，変位法の連立方程式を組み立てれば，解いて行ける.

式形は上述の通りであるが，仕事量分散の最小化には物理的・力学的な意義付けが必要である.

分散は正の値であり，その最小化式は，B. A. Finlayson の主張するエントロピー増大速度最小の原理（principle of minimum rate of entropy production）[6]に一致するようである.

4.　ポテンシャル勾配要素

(1) この章の趣旨

本稿はHelmholtz分解（*H-d*）研究の一環である，ことを最初に述べた.

H-d を修正し，離散Helmholtz分解（*dHd*）法を提唱している.

その経緯から，補ひずみエネルギー法にも切片 $\{\boldsymbol{u}\}_0$ が不可欠との主張に到った.

dHd は，① $\nabla\boldsymbol{u}$ は9自由度数なので，9 以上の条件式が必要，② せん断形は2自由度数で表されるので，共役変数の式が必要，③ $\nabla\boldsymbol{u}$ の非対角項6成分は，3成分に縮約可能，④ *H-d*・*dHd* 表示には，切片 $\{\boldsymbol{\psi}\}_0$ が必要，など，③以外は至極当たり前の結論である.（ ③も，②に依る.）

上述の，補ひずみエネルギー法の主張も同様であるが，その経緯での，切片 $\{\boldsymbol{\psi}\}_0 = 0$ とする*dHd* 要素，を提示して置く.

(2) ポテンシャル勾配要素

ポテンシャル要素は，$\nabla\varphi$ や $\nabla\mathrm{P}$，或いは $curl\boldsymbol{\psi}$ など，勾配を数値計算に使うので，φ 自身（$\varphi^{(000)}$）は必ずしも必要ない.

一般には双1次要素・3重1次要素を適用するので，頂点ノードにはパラメータ $\{\varphi\}_k$, $\{\psi_i\}_k$, $\{\mathrm{P}\}_k$, など，を設定して表す.

適合ポテンシャル要素はC^1連続とする必要があり，双3次要素・3重3次要素となる.

双3次要素の係数ベクトルの例は，式(9)で表される.

$$\begin{aligned}\{&\varphi^{(00)}, \varphi^{(10)}, \varphi^{(20)}, \varphi^{(30)}\\ &\varphi^{(01)}, \varphi^{(11)}, \varphi^{(21)}, \varphi^{(31)}\\ &\varphi^{(02)}, \varphi^{(12)}, \varphi^{(22)}, \varphi^{(32)}\\ &\varphi^{(03)}, \varphi^{(13)}, \varphi^{(23)}, \varphi^{(33)}\}_0\end{aligned} \tag{9}$$

頂点ノードパラメータは，

$\{\varphi^{(00)}, \varphi^{(10)}, \varphi^{(01)}, \varphi^{(11)}\}_k$ である.

その内の $\{\varphi^{(00)}\}_k$ 成分の自由度を重心に移し，重心ノードを，

$\{\varphi^{(00)}, \varphi^{(20)}, \varphi^{(11)}, \varphi^{(02)}\}_G$ で表す，とする.

したがって，頂点ノードには，

$\{\quad \varphi^{(10)}, \varphi^{(01)}, \varphi^{(11)}\}_k$ が残る.

その上で，重心ノードパラメータの $\{\varphi^{(00)}\}_G$ 成分を，

$\{\varphi^{(00)}\}_G = 0$ に，ゼロセットする.

上述が，パラメータ勾配要素である.

ポイントは係数ベクトルから $\{\varphi^{(00)}\}_0$ を無くし，重心ノードのパラメータ $\{\varphi^{(00)}\}_G$ も無くし，完全に勾配パラメータのみで表す事はできない，点に在る.

切片は，$\{\varphi^{(00)}\}_0 = 0$ でも必要，とするものである.

$\{\varphi^{(11)}\}_G$ は＜ $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x$ ＞の最小化に，$\{\varphi^{(20)}\}_G$，$\{\varphi^{(02)}\}_G$ は＜ $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y$ ＞の最小化や，45°座標回転系のせん断ひずみ（= デカルト座標の＜ $\partial u/\partial x - \partial v/\partial y$ ＞）の最小化に適用する.（Locking-free有限要素法.）

MAC法の $\nabla\mathrm{P}$ 項も，上述要素で表せる.

上述勾配要素が，*dHd* 法研究の成果・結果であり，いろいろな可能性を秘めている.（[付録]参照のこと.）

5.　原始変数法への*dHd* 法の適用

変位と圧力を変数とするスキームは原始変数法と呼ばれる.

流れ場の計算で，原始変数法が可能となったのは（前出の）MAC法の提案による.（固体では混合法と呼ばれるようである.）

繰り返すが，MAC法はCoulombゲージを満たす方法であり，非圧縮成分の体積保存法であり，密度を乗じて，質量を保存する技法である.

３大保存則の中でも，質量が無くなるかどうかは，数値計算スキームでも最重要である.

MAC法以前は $\psi - \omega$ 法が古典的技法として知られていた.（質量を代数的に満たすので，Coulombゲージは対象外の方法.）

はじめに述べたように，本稿はHelmholtz分解に関する研究であり，その成果の一つとして応力法を述べた.

かつ，Coulombゲージを満たすことがポイントとした.

数値計算で重要なことは，共役変数の概念である.

広く知られたCauchy-Riemannの関係式を満たすべき，と言ってもよい.

技法としては2D鏡像計算法を採るべきである.（前述の均等配分法はそのひとつ.）

2Dの＜ $div\boldsymbol{u} = 0$ ＞に対する共役変数最小化がCauchy-Riemannの縦成分関係式である.

また，2Dの＜ $curl\boldsymbol{u}$ ＞計算（鏡像計算）に対する共役変数最小化がCauchy-Riemannの横成分関係式である.

＜ $div\boldsymbol{u}$ ＞ も ＜ $curl\boldsymbol{u}$ ＞ も，2項（成分）より成るので，2条件式必要である.かつ，$\boldsymbol{u}$ 以外の変数（パラメータ）でな

ければならない．

そこで$< div\boldsymbol{u} >$ の計算には Φ 要素を作業要素とし，式(10)を制約式として加え，同時に満たす．（$\Rightarrow 0$ は最小２乗法で加えるの意．）

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow 0,\quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\Rightarrow 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\Rightarrow 0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\Rightarrow 0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

$< curl\boldsymbol{u} >$ の計算には Ψ 要素を作業要素とし，式(11)を制約式として加え，同時に満たす．

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow 0,\quad \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow 0 \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}+\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\Rightarrow 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\Rightarrow 0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\Rightarrow 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

固体ではせん断応力の計算時に，剛体回転を最小化するので，式(10)の $<\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Rightarrow 0>$ は $<\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Rightarrow 0>$ となる．

式(6*a*), (6*b*)は変位・速度・加速度項の制約条件である．式(10)，式(11)はひずみ・応力項の制約条件である．

6.　まとめ

補ひずみエネルギー法は“応力法”と呼ばれる．静定架構で解いて行く“旧来の応力法”も在る．

両者に共通なのは，変位の勾配のみで表す点である．Helmholtz分解もポテンシャルの勾配のみで表す．

いずれも基本境界条件が表せない．そこで変位パラメータを加える方法を提示した．

変位が満たす条件は，Coulombゲージである．その満たし方も提示した．（Coulombゲージは2D・3Dが対象．）

補ひずみ（complemental）エネルギー法が応力法，との表現は，古典的な応力法と混乱を来す．“応力変数変分法”或いは“応力変分法”などと呼んで，明確にする方がよい．

補ひずみエネルギー法に基づく応力要素法（base force element method based on the complementary energy principle）などの方法が提案されているが，応力法（force method）とは区別している．

今後の課題は諸氏に，現実問題へ，広く適用して頂くことである．

[付録] $\nabla\boldsymbol{u}$ の縮約に関する事項

dHd 検討の結果として．$\nabla\boldsymbol{u}$ の非対角項6成分は，3成分に縮約可能，とした．ただし，数値的に縮約可能なのであって，代数的には縮約できない，ことを述べて置く．

Coulombゲージは代数的に満たせないこと，$\nabla div\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ が代数的に満たせないこと，なども同様であり，それらを数値的に満たして行くのが数値計算法である．

$div\boldsymbol{\psi}=0$ や $div\boldsymbol{u}=0$ は，$(u+v),(v+w),(w+u)$ を，それぞれ代数的に$=0$とすることはできないので，数値的に満たす他ない．（順次 $v=-u, w=-v, u=-w$ を，代入しては行けない．）

$\partial u/\partial y=\partial w/\partial y$，$\partial v/\partial x=\partial w/\partial x$ が代数的に表せれば，せん断形も回転形も同じになるので，数値的に満たす他ない，のも同様である．

参考文献

[1] 山田，菊地，風間，高橋: アイソレート要素法の理論と実際，計算工学会論文集（2022年11月9日）資料，計算工学会，2022.

[2] Knoph, E.: Elektronische Berechnung von Stabtranwerken, Konstrukiver Ingenieurbau – Berichte Heft 3, Aus dem Institut für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum,

[3] 例えば，数学ハンドブック p.p.258，丸善，1960.

[4] 今村： 有限要素混合変分法：准 C^1 連続な有限要素法，計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.

[5] 今村： 離散Helmholtz分解に基づくLocking-free有限要素法，計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.

[6] フィンレイソン, B. A.，鷲津・山本・川井(共訳) : 重み付き残差法と変分原理，培風館, 1974