

構造部材の固定度推定に用いる 射影フィルタ族の数理的特性について

Mathematical Characteristics of Projection Filter Family Used for
Estimation of Support Conditions of Structural Members

遠藤龍司¹⁾, 登坂宣好²⁾

Ryuji Endo and Nobuyoshi Tosaka

1) 工博 職業能力開発総合大学校 名誉教授 (Material Speaks Polytechnic Science Lab.)

(〒192-0373 八王子市上柚木3-9-1 E-mail:endo@uitech.ac.jp)

2) 工博 Material Speaks T-lab. 代表 (〒192-0373 八王子市上柚木3-9-1, E-mail:nob42tsk19@gmail.com)

An inverse analysis method was proposed to estimate the end support conditions of elastic members. The projection filter family was adopted as the inverse analysis method based on the natural frequency obtained from the impact hammer excitation was used as the observation data. The mathematical characteristics of our method were examined and the method for practical application was shown.

Key Words : Projection filter family, Mathematical characteristics, Practical application

1. はじめに

我が国の建築構造物は大地震に対して塑性変形を許容するが、倒壊・圧壊を防止するため梁端部に塑性ヒンジの形成を容認している。また、鉄骨構造の柱脚の支持に関しては埋め込み型、根巻型および露出型柱脚としてモデル化されており、なかでも露出型柱脚に関しては、過去にピン支持としてモデル化されていたが、現在は適切に回転剛性を評価し曲げモーメントが生じることを前提として設計することとしている^[1]。一方、塑性ヒンジによる梁端部の剛性の低下率や柱脚の回転剛性の評価は設計者に委ねられており、地震が多発する我が国においては精度の高い評価方法の開発が望まれている。生じている現象から、現象の程度を推定する工学問題は逆問題として定式化できる。

筆者らはこれまでにフレーム構造モデルの水平剛性の推定に関する逆問題に関して、固有振動数を観測データとしてフィルタ理論を繰返し計算アルゴリズムとして構成し、複数の未知パラメータの同定方法を提案してきた経緯がある^[2]。フィルタは一般に多用されているカルマンフィルタに加え、射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタおよび可変的パラメトリック射影フィルタによるアルゴリズムを提案し、射影フィルタ族として安定的な繰返し計算のための数理的特性について感度行列の固有値解析と特異値解析の観点から検討している。

本稿では梁崩壊型として梁端部に塑性ヒンジが形成された場合の接合部の回転剛性の低下の程度や露出型柱脚の回転剛性の評価方法のための逆解析方法を提案するものである。本研究では、逆解析手法に筆者らがこれまで検討してきた射影フィルタ族を採用し、観測データとして

インパクトハンマ加振から得られた固有振動数とする逆解析の数理的特性の検討を行い実用化への提案を示すことを目的とする。

2. 部材固定度推定に関する問題の設定

問題の設定に関しては、先ず図-1に示すように弾性部材の両端が回転剛性を有する回転ばねにより、極めて剛性の大きい柱材に支持されているものとする。これを局所損傷検出モデルと呼ぶことにする。

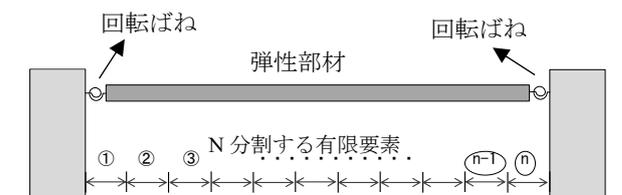


図-1 端部固定度推定のためのモデル

回転ばねの回転剛性の推定に当たっては弾性部材の運動方程式の固有値問題を数理モデルとすることから、弾性部材をn個の有限要素に分割するが、有限要素①および②は固定支持とピン支持の中間の固定度を有するものとし固定度を α として次式の関係で表すことにする。

$$\alpha\theta_1 + (1 - \alpha)M_1 = 0 \quad (1)$$

式(1)より

$$M_1 = -\frac{\alpha}{1 - \alpha}\theta_1 \quad (2)$$

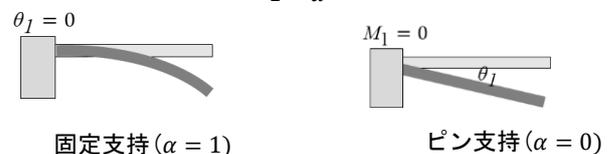


図-2 固定支持とピン支持 ($0.0 < \alpha < 1.0$)のイメージ

3. 離散的固有方程式の誘導

梁の曲げ振動を対象とした運動方程式は次式で与えられる。

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \omega^2 m v(x) = 0 \quad (3)$$

ここに、 EI は曲げ剛性、 $v(x)$ は鉛直方向たわみ、 m は単位質量であり ω は固有円振動数である。運動方程式(3)に梁要素を用いた有限要素で離散化すると次式の固有方程式を得る。

$$[K_e] - \omega^2 [M_e] = 0 \quad (4)$$

ここに、 $[K_e]$ と $[M_e]$ はそれぞれ次式で与えられる要素剛性行列と要素質量行列である。

$$[K_e] = \frac{EI_c}{l_c} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[M_e] = m_c \frac{l_c^3}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 l_c は要素長さである。両端部境界において、要素剛性行列と要素質量行列に、回転角 θ と曲げモーメント M との関係(1)を組み込むと次式を得る。

左端部剛性行列

$$[K_l] = \frac{EI_l}{l_l} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -12 & 6 \\ 4 + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) l_l & 0 & -6 & 2 \\ -6 & 0 & 24 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (7)$$

左端部質量行列

$$[M_l] = m_l \frac{l_l^3}{420} \begin{bmatrix} 22 & -1 & 54 & -13 \\ 4 + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{1}{l_l} & 0 & 13 & -3 \\ 13 & 0 & 312 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (8)$$

右端部剛性行列

$$[K_n] = \frac{EI_n}{l_n} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ -12 & -6 & -6 & -1 \\ 6 & 2 & 4 + \left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\right) l_n & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

右端部質量行列

$$[M_n] = m_n \frac{l_n^3}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 \\ 54 & 13 & -22 & -1 \\ -13 & -3 & 4 + \left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\right) \frac{1}{l_n} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

4. フィルタリングアルゴリズムを用いた逆解析

(1) 繰返し計算アルゴリズムの構成

離散的ダイナミクスシステムに対するフィルタ理論を局所損傷検出のための逆問題解析に援用する。局所損傷検出とは、対象とする部材の固有周期(振動数)を観測し、その部材の端部の支持状態(回転剛性)を同定する問題と定義することにする。固有振動数を観測データとし、両端部回転剛性を同定する逆問題解析を以下のように構成する。

・状態方程式

$$\tilde{z}_{t+1} = \mathbf{F} \tilde{z}_t \quad (11)$$

\tilde{z}_t は状態量ベクトルである。状態遷移行列は単位行列で表わされ、システム雑音は無視することにする。これより、添字 t は時間項を表わすのではなく、フィルタリングステップを意味することになる。

・観測方程式

$$\mathbf{y}_t = \hat{\mathbf{M}}_t \tilde{z}_t + \mathbf{v}_t \quad (12)$$

ここに、 $\hat{\mathbf{M}}_t$ は疑似線形化された感度行列であり次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{M}}_t = \frac{\partial m_t(\tilde{z}_t)}{\partial \tilde{\alpha}_t} \quad (13)$$

これらのことより、フィルタ方程式も非線形ベクトル関数を用いた、いわゆる拡張型を用いる必要がある。

・フィルタ方程式

$$\tilde{z}_{t+1/t} = \tilde{z}_{t/t-1} + \mathbf{B}_t (\mathbf{y}_t - m_t(\tilde{z}_{t/t-1})) \quad (14)$$

ここに、 \tilde{z} に関する下付き添字 $t/t-1$ は t 回目のフィルタリングステップの情報に基づく $t-1$ 回目の状態ベクトルを意味する。

逆解析手法としてのフィルタリングアルゴリズムは、観測データである固有振動数 \mathbf{y}_t と状態量である回転剛性が \tilde{z}_t のときの固有方程式から計算された固有振動数が一致するまで繰返し計算するアルゴリズムである。従って、フィルタゲイン(復元作用素) \mathbf{B}_t は繰返し計算において、状態量 \tilde{z}_t の変化をコントロールする役割を担っていると考えられる。すなわち、フィルタリングの性質はフィルタゲイン \mathbf{B}_t の性質に依存することになる。

(2) 採用するフィルタゲイン

・射影フィルタ(射影フィルタ族の一フィルタ)

$$\mathbf{B}_{PF} = (\mathbf{M}_t^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}_t)^{-1} \mathbf{M}_t^T \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{M}_t^{-1} \quad (15)$$

ここに、 \mathbf{R} は推定誤差共分散行列、 \mathbf{Q} は観測誤差共分散行列である。

ここで、射影フィルタについて概説しておく。射影フィルタは基本的に状態ベクトルの射影が推定量と一致するように構成されている。通常、推定量は観測誤差の影響により、最良近似の周りに散らばることになる。射影フィルタは観測誤差ベクトルのみに関して平均操作を考慮した評価関数を満足する解として与えられるため、フィルタリング計算の安定性において大変厳しいフィルタといえる。未知数である状態量の数と観測量の数を等しくす

ると射影フィルタ(15)は感度マトリックスの逆マトリックス M^{-1} で表されることになる。

本稿では射影フィルタ族のうち射影フィルタの特性に着目して報告する。

5. 提案式の確認

逆解析を実施するに当たって、表-1および図-3に示す断面を有し、図-1に示したモデルに関して、まず固定度 α と固有振動数の関係および固有モード形の関係について検討を加える。

図-4から1次モードおよび2次モードは固定度 α が0に近い場合はピン接合の固有振動数を示し、1に近づくに従い固定端を有する梁の固有振動数が得られている。また、固有モードとの関係においては、 α が0に近い場合回転角が明確に生じており、 α が0.99では回転角は生じておらず固定端の様相を呈していることがわかる。これらの結果から、固定度 α の設定は有効であることがわかる。

表-1 確認計算に用いた梁の諸元

| | | | |
|---------|----------------------------|--------------------------|-----------|
| 梁幅 (cm) | 梁成 (cm) | フランジ厚 (cm) | ウェブ厚 (cm) |
| 2.0 | 2.0 | 0.2 | 0.2 |
| 梁長 (cm) | ヤング係数 (N/cm ²) | 質量 (kg/cm ²) | |
| 100 | 1.55×10^7 | 7.8×10^{-3} | |

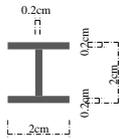
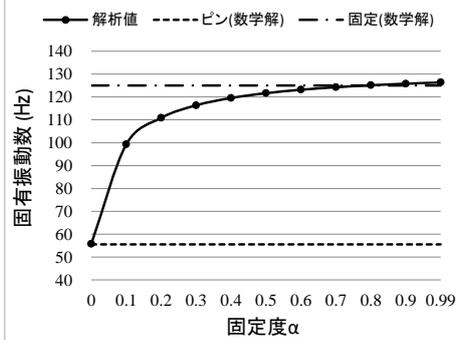
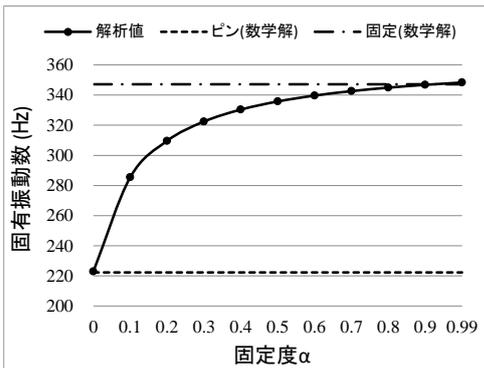


図-3 断面



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

図-4 固定度と固有振動数の関係

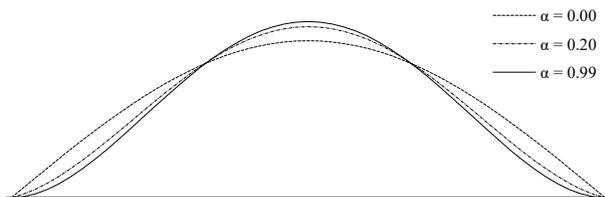


図-5 固定度と固有モード形の関係

6. 現実問題への対応

(1) 観測データの計測

ここでは実在に近い鉄骨フレーム構造の逆解析から求めた Type A~C の3種類の接合部の固定度に対応する周波数応答関数を計測する。



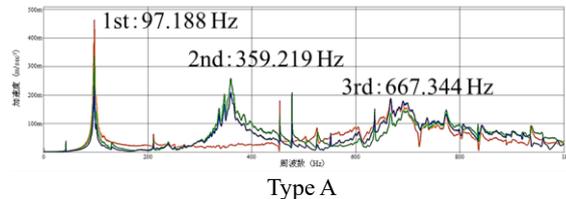
Type A Type B
高力ボルト接合



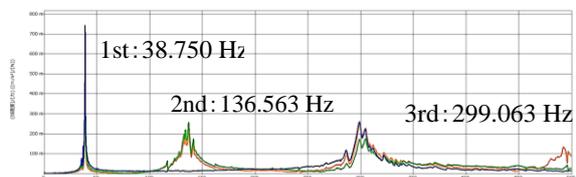
Type C
部分溶け込み溶接 完全溶け込み溶接
梁接手部 高力ボルト 摩擦接合

図-8 鉄骨フレームモデルの接合部

次にインパクトハンマ加振による実験モード解析による周波数応答関数の結果を示す。



Type A



Type B

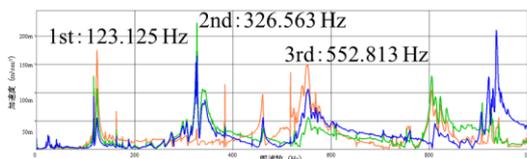


図-9 各モデルの周波数応答関数

(2) 固定度 α の具体的な回転角への対応

基本的に逆解析手法には射影フィルタを用いた。本研究では、射影フィルタを用いた逆解析において、両端部の初期値に異なる値を与える方法を開発しており、その方法を概説しておく。

まず、本逆解析で用いた感度行列を示す。

$$M_t = \begin{bmatrix} \omega_{1t} - \omega_{1e1} & \omega_{1t} - \omega_{1e2} \\ z_{1t} - z_{1e1} & z_{1t} - z_{1e2} \\ \omega_{2t} - \omega_{2e1} & \omega_{2t} - \omega_{2e2} \\ z_{2t} - z_{2e1} & z_{2t} - z_{2e2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

繰返し計算を駆動するために、初期値に対して2%の変化率を与えることにし、左右の初期値を同時に変化させるような設定ではなく、まず左端部の初期値を変化させ、次に右端部初期値を変化させる局所前進差分を用いることとした。

左右端部の異なる値を初期値として設定したが、組み合わせの一例を表-2に示す。このような感度行列の差分計算と初期値に関する考察は文献 [2] に詳しい。

表-2 初期値の組み合わせ

| End of Left | End of Right | |
|-------------|--------------|------|
| 0.1 | 0.2~0.9 | 8種類 |
| 0.2 | 0.3~0.9 | 7種類 |
| 0.3 | 0.4~0.9 | 6種類 |
| 0.4 | 0.5~0.9 | 5種類 |
| 0.5 | 0.6~0.9 | 4種類 |
| 0.6 | 0.7~0.9 | 3種類 |
| 0.7 | 0.8~0.9 | 2種類 |
| 0.8 | 0.9 | 1種類 |
| 0.9 | — | — |
| Total | | 36種類 |

本逆解析では、このような根拠のもとで感度行列を設定することにする。また観測データと未知パラメータの数が同じ場合、すなわち感度行列が正方行列として構成される場合、射影フィルタは式(15)に示したように、観測誤差共分散行列を陽に含まない極めて単純なフィルタとなるが、こうした射影フィルタでも安定した繰返し計算を得ることができる。

図-9に示した周波数応答関数から求めた1次モードと2次モードの固有振動数を観測データとして、表-2に示した初期値の組み合わせのもとで逆解析を行うと、固定度 α を表3のように求めることができる。

表-3 実験値に対応する解析値と固定度

| | 固有振動数 (Hz) | | | 固定度 α 左-右 |
|----------|-------------|----------|----------|---------------------|
| | 1st mode | 2nd mode | 3rd mode | |
| type [A] | 実験値 97.188 | 359.219 | 667.344 | |
| | 解析値 97.133 | 354.344 | 646.102 | 0.004-0.004 |
| type [B] | 実験値 38.750 | 137.031 | 299.063 | |
| | 解析値 38.774 | 136.790 | 295.222 | 0.017-0.017 |
| type [C] | 実験値 123.125 | 326.563 | 552.813 | |
| | 解析値 123.125 | 333.282 | 535.225 | 0.477-0.477 |
| | | 333.282 | 535.135 | 0.326-0.803 |

| たわみ角 | 左端部 | 右端部 |
|----------|----------------------------|----------------------------|
| type [A] | 1.7×10^{-2} (rad) | 1.1×10^{-2} (rad) |
| type [B] | 7.3×10^{-2} (rad) | 5.2×10^{-2} (rad) |

図-10 7Kn/mの荷重：Type A, Bのたわみ角

| たわみ角 | 左端部 | 右端部 |
|------|----------------------------|----------------------------|
| | 4.0×10^{-6} (rad) | 5.7×10^{-7} (rad) |

図-11 7Kn/mの荷重：Type Cのたわみ角

逆解析により固定度 α を決定できれば、剛性行列および質量行列の要素に具体的な値として回転剛性を組み込むことができ、有限要素解析による応力解析から該当するたわみ角を図-10,11のように求めることができる。

(3) 支持状態の評価

本逆解析で求めた支持状態を判定した一例を表-4に示しておく。左右の回転剛性が異なる場合も本手法で評価することが可能であることがわかる。

表-4 固定度の判定の一例

| | 固定度 α | 判定 | 接合状態 |
|----------|--------------|----------------------|------|
| type [A] | 0.004 | $\alpha \leq 0.1$ | ピン接合 |
| type [B] | 0.017 | $\alpha \leq 0.1$ | ピン接合 |
| type [C] | 左 0.326 | $0.1 < \alpha < 0.6$ | 半剛接合 |
| | 右 0.803 | $\alpha \geq 0.6$ | 剛接合 |

Type A,Bに関しては本逆解析の基本仮定と異なり、柱の剛性が小さく、柱の変形の影響が懸念され、今後詳細な検討が必要である。

7. まとめ

本手法を採用することにより、大地震時の塑性ヒンジが形成されたときの剛性評価に対する安全性の確認や柱脚の支持状態の数値的評価が可能である。本逆解析では射影フィルタ族のうち、単純な射影フィルタを用いることができアルゴリズムの複雑化を避けることができる。

参考文献

[1] 国土交通省国土技術政策総合研究所, 建築研究所監修, 2015年版建築物の構造関係技術基準解説書, 平成29年7月

[2] 池田義人, 遠藤龍司, 登坂宣好: 構造損傷検出に用いる射影フィルタの感度行列に基づく基本特性, 日本建築学会構造系 論文集, Vol.81, No.730, pp.2069-2077, 2016