計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月) 計算工学会

流体構造連成を考慮した内部流路問題の形状設計

Shape design of inner flow problems considering fluid-structure-interaction

片峯 英次 1)　吉田 泰志 2)
Eiji Katamine and Yasushi Yoshida

1)博 (工) 岐阜工業高等専門学校　機械工学科 （〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑, E-mail: katamine@gifu-nct.ac.jp)
2)岐阜大学 工学部 機械工学科 学生（〒 501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1)

This paper presents numerical solution to a shape optimization of stationary fluid-structure-interactive (FSI) fields. The minimization problem for total dissipation energy in the viscous flow field and the mean compliance minimization problem in order to achieve stiffness maximization in the structural field are considered for the shape optimization. In the FSI analysis, a weak coupled analysis is used to alternately analyze the governing equations of the flow field domain and the structural field considering geometrically nonlinear. Shape derivative function of the shape optimization problem is derived theoretically using the Lagrange multiplier method, adjoint variable method, and the formulae of the material derivative. Reshaping is carried out by the H^1 gradient method proposed as an approach to solving shape optimization problems. For shape optimization of the FSI fields, a new shape update method is proposed to overcome separation and interference of the finite element meshes on the common boundary between the flow field and the structural field. Numerical analysis program for the shape optimization problem is developed by using FreeFEM, and the validity of proposed method is confirmed by results of 2D numerical analyses.

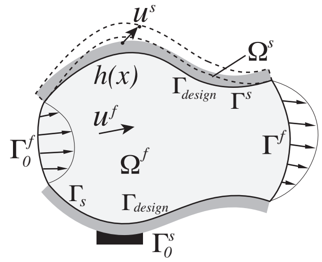
Key Words : *Shape Optimization, Adjoint Variable Method, Finite Element Method, Fluid-Structure-Interactive, H^1 Gradient Method*

1. はじめに

流体構造連成問題 [1] は，機械工学分野に限らず，生体工学，海洋工学などの分野における興味深い課題であり，形状設計問題は，工学分野における重要課題の一つである．流体構造連成を考慮した形状最適化に関する研究は，Lund ら [2], Jang ら [3], Aghajari ら [4] によって行われている．これらの研究では，いずれも設計境界を B-spline 関数で表現して，設計変数を極力少なくしたパラメトリックな解析法によって実施されている．

著者らはこれまでに，構造の幾何学的非線形性を考慮した流体構造連成場に対して，構造領域の剛性最大化を目的とした形状最適化 [5] の解法を提案し，その妥当性を示した．その解法には H^1 勾配法 [6][7] を用いた．H^1 勾配法を利用した解析では，形状最適化のための形状変動を分布系の領域変動によって表現するために，設計境界を表すための設計変数の数を制限することなく，ノンパラメトリックな解析が実現できる．また構造の幾何学的非線形性を考慮した流体構造連成場の内部流れ場領域に対して，散逸エネルギー最小化を目的した形状設計問題 [8] の解法を提案した．この内部流れ場領域における散逸エネルギー最小化では，導出した形状勾配密度関数に基づいて H^1 勾配法を適用して，流体領域の形状更新を行い，さらにその流体領域の形状更新に伴い，流体領域と弾性領域の共通境界の変動が界面追跡できるように，弾性領域を形状更新させる一方法を提案した．上記の構造領域の剛性最大化 [5]，内部流れ場領域における散逸エネルギー最小化 [8] に対して，FreeFEM [9] [10] を利用して開発したプログラムによる解析例から提案する手法の妥当性を示した．

本小論文では，流体構造連成を考慮した構造壁を有する内部粘性流れ場に対して，流れ場領域では散逸エネルギーの最小化，構造壁領域では剛性の最大化を目的とする多目的形状最適化の解法と解析結果について紹介する [11].



図–1 Fluid-Structure-Interaction problem

2. 流体構造連成場の多目的形状最適化

(1) 問題の定式化

Fig. 1 に示す粘性流れ場領域 Ω^f，構造領域 Ω^s から構成される流体構造連成を考慮した定常内部流れ場を考える．粘性流れ場領域 Ω^f における境界 $\partial\Omega^f = \Gamma_0^f \cup \Gamma^f \cup \Gamma^s$，構造領域 Ω^s における境界 $\partial\Omega^s = \Gamma_0^s \cup \Gamma^s$ とする．Γ_0^f は流速既知境界，Γ^f は応力既知境界，Γ_0^s は変位既知境界であり，両領域に共通する境界 Γ^s は流体構造連成を考慮する境界である．また，u^f，p，w^f，q をそれぞれ Ω^f における流速，圧力，随伴流速，随伴圧力，u^s，w^s を

Ω^s における変位，随伴変位とする．

このとき，流れ場領域 Ω^f における散逸エネルギー最小化問題は次のように定式化でき，詳細は文献 [8] に譲る．形状更新のための領域変動において，流速既知境界 Γ_0^f と応力既知境界 Γ^f を拘束し，大きさ制約を設ける．

$$
\begin{aligned}
&\text{Given} && \Omega^f{}_{ini} \\
&\text{find} && \Omega^f{}_{opt} \\
&\text{that minimize} && a^f(u^f, u^f) && (1)\\
&\text{subject to} && a^f(u^f, w^f) + a_1^f(u^f, u^f, w^f) + b^f(p, w^f) = 0 \\
& && \qquad \forall w^f \text{ in } \Omega^f && (2)\\
& && b^f(q, u^f) = 0 \quad \forall q \text{ in } \Omega^f && (3)\\
& && \int_{\Omega^f} dx \le M^f && (4)
\end{aligned}
$$

式 (1) は目的汎関数であり，粘性流体の散逸エネルギーである．式 (2)，式 (3) は粘性流れ場領域の支配方程式である Navier-Stokes 方程式および連続の式の弱形式，式 (4) は流れ場領域の制約式であり，M^f は初期領域の大きさである．支配方程式におけるそれぞれの項は次のように定義されている．

$$
\begin{aligned}
a^f(u^f, w^f) &= \int_{\Omega^f} 2\mu^f \varepsilon^f(u^f) : \varepsilon^f(w^f)\, dx,\\
a_1^f(u^f, u^f, w^f) &= \int_{\Omega^f} \rho^f (u^f \cdot \nabla u^f) \cdot w^f\, dx,\\
b^f(p, w^f) &= -\int_{\Omega^f} \nabla \cdot w^f p\, dx,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし，μ^f，ρ^f はそれぞれ流体の粘性係数，密度であり，流れ場領域における応力 $\sigma^f(p, u^f)$ は次のように定義されている．

$$
\sigma^f(p, u^f) = -pI + 2\mu^f \varepsilon^f(u^f), \quad \varepsilon^f(u^f) = \frac{1}{2}(\nabla u^f + (\nabla u^f)^T) \tag{6}
$$

次に，構造領域 Ω^s における剛性最大化は次のように定式化でき，詳細は文献 [5] に譲る．形状更新のための領域変動において，変位既知境界 Γ_0^s と流体・構造共通境界 Γ^s を拘束し，大きさ制約を設ける．

$$
\begin{aligned}
&\text{Given} && \Omega^s{}_{ini} \\
&\text{find} && \Omega^s{}_{opt} \\
&\text{that minimize} && l^s(u^s) + d^s(u^s, u^s) && (7)\\
& && a^s(u^s, u^s, w^s) = l^s(w^s) + d^s(u^s, w^s) \\
& && \qquad \forall w^s \text{ in } \Omega^s && (8)\\
& && \int_{\Omega^s} dx \le M^s && (9)
\end{aligned}
$$

式 (7) は目的汎関数であり，体積力と表面力によるコンプライアンスである．式 (8) は構造領域における支配方程式の弱形式を表し，支配方程式におけるそれぞれの項は次のように定義されている．

$$
\begin{aligned}
a^s(u^s, u^s, w^s) &= \int_{\Omega^s} \Sigma(\varepsilon^s(u^s)) : d\varepsilon^s(u^s)[w^s]\, dx,\\
l^s(w^s) &= \int_{\Omega^s} f^s \cdot w^s\, dx,\\
d^s(u^s, w^s) &= \int_{\Gamma^s} h(u^s) \cdot w^s\, d\Gamma\\
&= \int_{\Gamma^s} \{(\det(I + \nabla u^s))\, \sigma^f(p, u^f)\, (I + \nabla u^s)^{-T}\, n\} \cdot w^s\, d\Gamma
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ただし，n は境界における単位法線ベクトル，応力 $\Sigma(\varepsilon^s(u^s))$ は第 2 Piola-Kirchhoff 応力を表し [12]，λ, μ^s の Lamé 定数を用いて次のように定義されている．

$$
\Sigma(\varepsilon^s(u^s)) = \lambda(\mathrm{tr}\varepsilon^s(u^s))I + 2\mu^s \varepsilon^s(u^s), \tag{11}
$$

$$
\varepsilon^s(u^s) = \frac{1}{2}\{(\nabla u^s)^T + \nabla u^s + (\nabla u^s)^T(\nabla u^s)\} \tag{12}
$$

また，$d\varepsilon^s(u^s)[w^s]$ は幾何学的非線形を考慮したひずみ $\varepsilon^s(u^s)$ の第 1 変分である．$f^s, h(u^s)$ はそれぞれ構造領域における体積力，流体・構造共通境界 Γ^s における表面力である．

(2) 随伴方程式および形状勾配密度関数

導出過程の詳細は文献 [8] に譲るが，流れ場領域 Ω^f に対する随伴方程式は次のように導出できる．

$$
\begin{aligned}
&a^f(u^{f\prime}, w^f) + a_1^f(u^{f\prime}, u^f, w^f) + a_1^f(u^f, u^{f\prime}, w^f) + b^f(q, u^{f\prime})\\
&\quad = 2a^f(u^f, u^{f\prime}) \quad \forall u^{f\prime} \quad \text{in } \Omega^f && (13)\\
&b^f(p', w^f) = 0 \quad \forall p' \quad \text{in } \Omega^f && (14)\\
&w^f = 0 \text{ on } \Gamma_0^f \text{ and } \Gamma^s && (15)
\end{aligned}
$$

ここで，$(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数（形状導関数）を表す．また，形状更新の感度となる形状勾配密度関数 G^f は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
G^f &= 2\mu\{\varepsilon^f(u^f) : \varepsilon^f(u^f) - \varepsilon^f(u^f) : \varepsilon^f(w^f)\}\\
&\quad -\rho^f(u^f \cdot \nabla u^f) \cdot w^f + \nabla \cdot w^f p + \nabla \cdot u^f q + \Lambda^f
\end{aligned}
\tag{16}
$$

同様に構造領域 Ω^s に対する随伴方程式は次のように導出できる [5].

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^s} \{\Sigma(d\varepsilon^s(u^s))[w^s] : d\varepsilon^s(u^s)[u^{s\prime}]\\
&\quad +\Sigma(\varepsilon^s(u^s)) : d^2\varepsilon^s(u^s)[w^s, u^{s\prime}]\}\, dx - d^s_{u^s}(u^s, w^s)[u^{s\prime}]\\
&\quad -l^s(u^{s\prime}) - d^{s\prime}(u^s, u^s)[u^{s\prime}, u^{s\prime}] = 0 \qquad \forall u^{s\prime} \text{ in } \Omega^s && (17)\\
&w^s = 0 \text{ on } \Gamma_0^s && (18)
\end{aligned}
$$

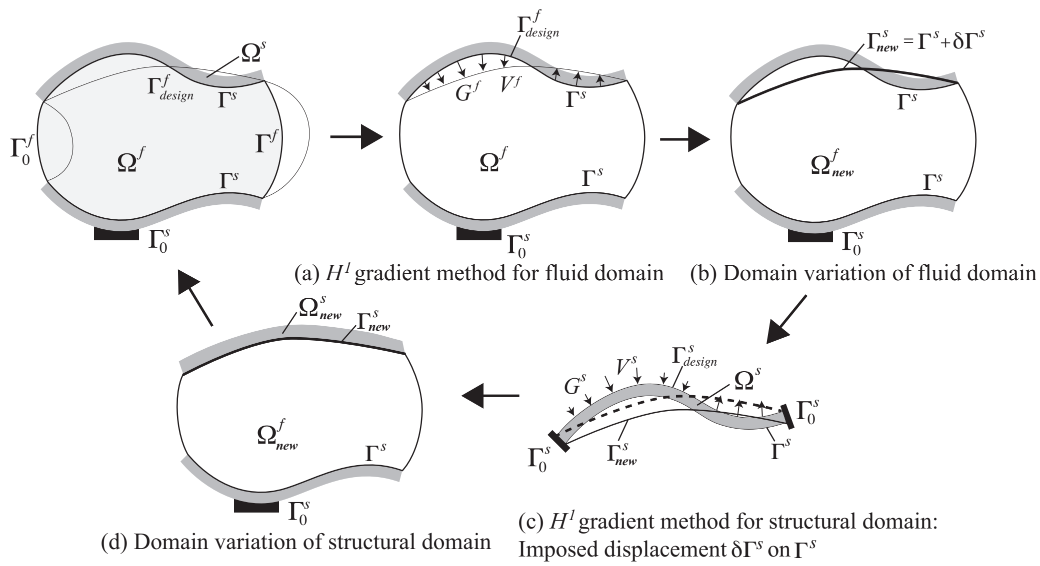
構造領域における形状勾配密度関数 G^s は次のように計算される．ただし，構造領域の形状設計では，簡単のために，表面力 $h(u^s)$ が作用する境界を設計境界から除いた場合を仮定している．

$$
G^s = -\Sigma(\varepsilon^s(u^s)) : d\varepsilon^s(u^s)[w^s] + f^s \cdot (u^s + w^s) + \Lambda^s \tag{19}
$$

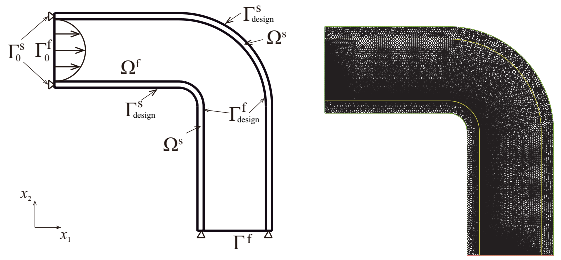
(3) 流体構造連成場における多目的形状最適化のアルゴリズム

流体領域 Ω^f の形状最適化のための形状更新に伴い，流体領域 Ω^f と構造領域 Ω^s の共通境界 Γ^s において，はく離や干渉が生じないように界面追跡をする必要がある．そこで，前報 [8] では，流体領域 Ω^f の形状最適化による共通境界 Γ^s の変動 $\delta\Gamma^s$ に対して，弾性領域 Ω^s 側の境界が界面追跡できるように形状更新する一方法を提案した．その形状更新の一方法の概略を Fig. 2 に示す．

本研究では，多目的形状最適化に対する流体構造連成場の形状更新法を以下のように提案する [11].



図–2 Interface tracking method: A new shape update method is proposed to overcome separation and interference of the finite element meshes on the common boundary Γ^s between the fluid domain Ω^f and the structural domain Ω^s.



(a)Numerical model (b)Finite element meshes

図–3 Numerical analysis model and meshes.

Step 1. 流体領域 Ω^f と弾性領域 Ω^s の共通境界 Γ^s を定義して，共通境界 Γ^s における有限要素節点を一致させるように設定し，それぞれの領域 Ω^f および Ω^s に対して有限要素メッシュを生成する．

Step 2. 流体領域 Ω^f のみに対して，設計境界 Γ^f_{design}（共通境界 Γ^s）に，感度 G^f に基づいた表面力を作用させた H^1 勾配法を適用し，流体領域 Ω^f の領域変動量 V^f を解析する．このとき，設計境界 Γ^f_{design} 以外の境界を拘束する．この解析によって得られた V^f により形状更新した新たな流れ場領域を Ω^f_{new} とし，新たな共通境界を $\Gamma^s_{new}(\Gamma^s_{new} = \Gamma^s + \delta\Gamma^s)$ として，Γ^s 上での流体領域の変動量を $\delta\Gamma^s$ と表現する．

Step 3. 構造領域 Ω^s のみに対して，設計境界 Γ^s_{design} に感度 G^s に基づいた H^1 勾配法を適用して弾性領域 Ω^s を領域変動させる．具体的には，共通境界 Γ^s に対して，境界変動量 $\delta\Gamma^s$ を強制変位に設定した境界条件を用いて，弾性領域 Ω^s の領域変動量 V^s を解析する．このとき，変位既知境界 Γ^s_0 を拘束する．この強制変位の境界条件の設定により，共通境界 Γ^s での界面追跡 $(\Gamma^s_{new} = \Gamma^s + \delta\Gamma^s)$ が実現できて，この解析によって得られた V^s により形状更新した新たな弾性場領域 Ω^s_{new} が得られる．

Step 4. **Step 2.**，**Step 3.** の解析で得られた流れ場領域 Ω^f_{new}，弾性領域 Ω^s_{new} により，新たな流体構造連成領域 $\Omega_{new} = \Omega^f_{new} + \Omega^s_{new}$ を得る．

3. 解析例

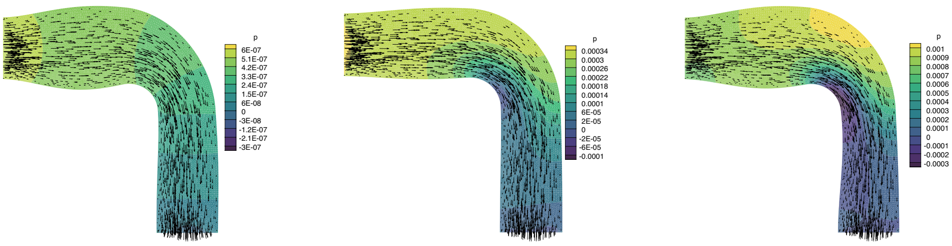
FreeFEM[9][10] を利用してプログラム開発を行い，そのプログラムを用いて解析した数値例を紹介する．Fig. 3(a) に示す曲がり管モデルで解析を行った．

流れ場領域 Ω^f では境界条件として，流速既知境界 Γ^f_0 に x_1 方向のポアズイユ流れを与え，応力既知境界 Γ^f では応力ゼロの自然境界とし，共通境界 Γ^s では流速ゼロを設定した．設計境界 Γ^f_{design} を共通境界 Γ^s とし，形状変更においてそれ以外の境界は拘束した．構造領域 Ω^s では境界条件として，変位既知境界 Γ^s_0 を拘束し，共通境界 Γ^s には流体による表面力を与え，それ以外の境界は自由境界とした．設計境界 Γ^s_{design} を自由境界とし，形状変更において変位既知境界 Γ^s_0 はすべり拘束とした．流体密度 $\rho^f = 998.2\ kg/m^3$，粘性係数 $\mu = 100.2 \times 10^{-5}$ Pa・s とし，$Re = 0.1, 50, 100$ となるように流入口におけるポアズイユ流れの平均流速を設定した．構造領域における体積力を無視し，ポアソン比 $\nu = 0.3$，ヤング率 $E = 5 \times 10^{-4}$ Pa$(Re = 0.1)$, $E = 1$ Pa$(Re = 50, 100)$ とした．Lamé 定数 λ および μ^s は，ヤング率 E とポアソン比 ν から $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu^s = \frac{E}{2(1+\nu)}$ を用いて計算した．モデルの寸法は，管内径 0.1 m，構造体の厚み 0.02 m とした．Fig. 3(b) に用いた有限要素分割を示す．

解析結果を Fig. 4 〜8 に示す．Fig. 4, 5 は，それぞれ初期形状での $Re = 0.1, 50, 100$ における流体構造連成解析後におけるメッシュ変形図，流速分布，圧力分布を示している．Fig. 6 は最適化形状での流体構造連成解析状態におけるメッシュ変形図を示してる．Fig. 7 は初期形状と最適形状を比較して示し，Re の大きさに応じた最適形状が得られていることが確認できる．流れ場領域に着目すると，$Re = 0.1$ ではストレート流路に近い形

Re=0.1 Re=50 Re=100

図–4 Deformed shapes for fluid domain Ω^f and structure domain Ω^s for initial shapes after fluid structure analysis.

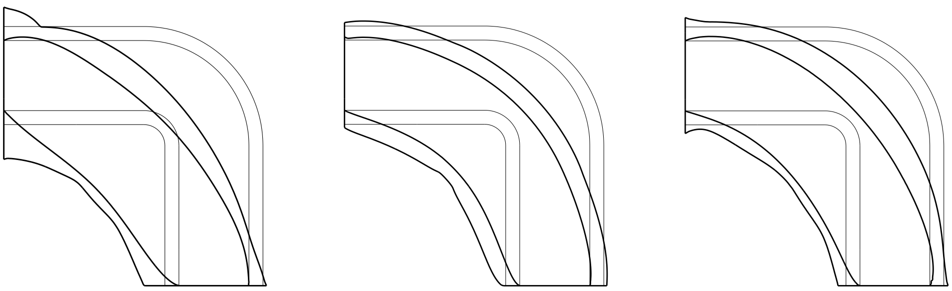


Re=0.1 Re=50 Re=100

図–5 Flow velocity and pressure distribution of flow fluid field Ω^f for initial shapes after fluid structure analysis.

Re=0.1 Re=50 Re=100

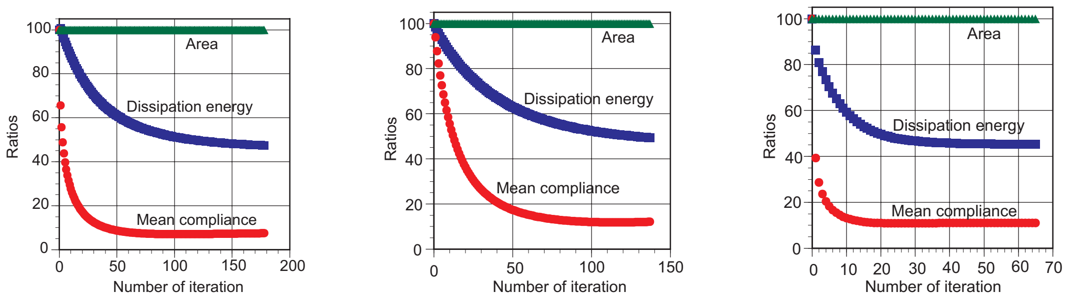
図–6 Deformed shapes for fluid domain Ω^f and structure domain Ω^s for optimum shapes after fluid structure analysis.



Re=0.1 Re=50 Re=100

図–7 Comparison of initial shape (thin lines) and optimum shape (bold lines) for flow field Ω^f and structure field Ω^s.

状，Re = 100 では滑らかな流路形状となっていることが確認できる．また構造領域に着目すると，Re=100 では流体の慣性力の影響より，曲がり部外側の構造壁に対して大きな流体力が作用し，その流体力による構造壁の変形を抑制するために，最適形状では構造壁肉厚が増大していることが確認できる．また Fig. 8 は，形状更新繰り返しに対する流れ場領域の目的汎関数である散逸エネルギー，構造領域の目的汎関数であるコンプライアンスの変化を示している．これらの結果から，全ての Re 数において流れ場，構造場の領域の大きさを一定に維持しつつ，流れ場領域の散逸エネルギー，構造領域におけるコンプライアンスは最小化していることが確認できる．



Re=0.1　　Re=50　　Re=100

図–8 Numerical results for curved channel model: Iterative histories for objective functionals.

4. まとめ

本論文では，流体構造連成を考慮した構造壁を有する内部粘性流れ場に対して，流れ場領域では散逸エネルギーの最小化，構造壁領域では剛性の最大化を目的とする多目的形状最適化の解法を提案した．提案した手法に基づいて H^1 勾配法を適用した解析例から，提案した解法の妥当性を示した．

参考文献

[1] 津川祐美子, 滝沢研二, 共訳, 流体-構造連成問題の数値解析, 森北出版, (2015).
[2] Lund, E., Moller H. and Jakobson, L. A., Shape design optimization of stationary fluid-structure interaction problems with large displacements and turbulence, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.25 (2003), pp.383-392.
[3] Jang, H.L. and Cho S., Adjoint shape design sensitivity analysis of fluid-solid interactions using concurrent mesh velocity in ALE formulation, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.80(2014), pp.20-32.
[4] Aghajari, N. and Schafer, M., Efficient shape optimization for fluid-structure interaction problems, Jorunal of Fluids and Structures, Vol.57(2015), pp.298-313.
[5] Katamine, E., Kawai, R. and Takahashi M, Shape optimization for stiffness maximization of geometrically nonlinear structure by considering fluid-structure-interaction, Mechanical Engineering Letters, Vol. 7, (2021), DOI: 10.1299/mel.21-00048, 8pages
[6] 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574 (1994), pp. 1479-1486.
[7] 畔上秀幸, 形状最適化問題の正則化解法, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 24, No. 2 (2014), pp. 83-138.
[8] 片峯英次，河合竜雅，山下響生，流体構造連成を考慮した粘性流れ場領域の形状最適化，日本機械学会論文集，Vol. 87, No. 899 (2021), DOI:10.1299/transjsme.21-00116, 15pages.
[9] 大塚厚二，高石武史，有限要素法で学ぶ現象と数理–FreeFem++数理思考プログラミング–，(2014), 共立出版.
[10] Hecht, F., New development in FreeFem++, Journal of Numerical Mathematics, Vol.20, No. 3-4 (2012), pp.251-265. 65Y15.
[11] Katamine, E., Kawai, R. and Yoshida, Y., Shape optimisation of Fluid-Structure Interactive field considering geometrically nonlinear structure, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.36, No.2, (2022), pp.138-151.
[12] Ciarlet, P. G., Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity, Elsevier, (1993).