計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月) 計算工学会

解の不連続性を利用する3次元散乱信号からのトモグラフィの数値的試み

A Numerical Challenge to Computerized Tomography from Scattered Signals in Three Dimensions Utilizing Discontinuity of Solutions

藤原宏志 [1)] 川越大輔 [2)] 大石直也 [3)]
Hiroshi Fujiwara, Daisuke Kawagoe and Naoya Oishi

[1)]博 (情報) 京都大学大学院 情報学研究科 准教授（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
[2)]博 (情報) 京都大学大学院 情報学研究科 助教（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp）
[3)]博 (医) 京都大学大学院 医学研究科 准教授（〒 606-8507 京都市左京区聖護院川原町, E-mail: noishi@kuhp.kyoto-u.ac.jp）

A novel method for computerized tomography from scattered signals is proposed in the present paper. The radiative transport equation (RTE) is known as a mathematical model of particle migration with scattering and absorption by media. A proper boundary condition introduces discontinuity of its solution, and its jump is expressed as the x-ray transform of the attenuation coefficient in RTE. We employ the discontinuous Galerkin method to evaluate the discontinuity in numerical computations, and the quantitative feasibility of computerized tomography by imaging the attenuation coefficient is shown.

Key Words : *Inverse Problems, Tomography, Scattered Signal, Three Dimentional Radiative Transport Equation, Discontinuity*

1. 緒言

本研究では，3 次元の領域中で吸収と散乱を伴って伝播する粒子線をもちいる計算機断層撮影法 (トモグラフィ) の実現可能性を論じる．特に近赤外光をもちいる生体のひかりトモグラフィ [1] を念頭に置き，定常輻射輸送方程式 (radiative transport equation; RTE) の係数再構成を考える．この逆問題に対し，入力に相当する境界条件を適当に設定し，直接的な再構成手法を提案する．ここで直接的とは，順問題の反復計算を必要としないことを意味する．

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を境界が滑らかな 3 次元の有界凸領域とし，粒子線が媒質による連続的な散乱と吸収を受けて Ω 中を伝播するとする．この伝播の数理モデルとして，微分積分方程式である RTE

$$-\xi \cdot \nabla_x I - (\mu_\mathrm{a} + \mu_\mathrm{s}) I + \mu_\mathrm{s} \int_{S^2} p(\xi \cdot \xi') I(x, \xi')\, d\sigma_{\xi'} = 0 \quad (1)$$

がもちいられる．本研究が想定するひかりトモグラフィでは，生体中の近赤外光の伝播を考え，生体の大きさが光速に対して充分小さいことから，定常状態に対応する RTE (1) をもちいる．ここで $I(x,\xi)$ は $x \in \Omega$ において $\xi \in S^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,;\, |\xi| = 1\}$ の方向に伝播する粒子線密度，μ_a と μ_s は媒質による粒子の吸収と散乱の度合を表す．また積分核 $p(\xi \cdot \xi')$ は，媒質による散乱によって粒子の伝播の向きが ξ' から ξ に変化する条件付き確率を表すが，その確率は ξ' と ξ のなす角のみに依存するものとする．さらに $d\sigma_{\xi'}$ は S^2 の面積要素であり，$\int_{S^2} p(\xi \cdot \xi')\, d\sigma_{\xi'} = 1$ である．

境界としては，$\nu(x)$ を $x \in \partial\Omega$ における外向き単位法線として，$\Gamma_\pm = \{(x,\xi) \,;\, x \in \partial\Omega, \pm\xi \cdot \nu(x) > 0\}$ を考える．このもとで，典型的な RTE の境界値問題 (順問題) では Γ_- で粒子線の流入密度 $I_0(x,\xi)$ を与えて，$\Omega \times S^2$ で (1) を満たす $I(x,\xi)$ を求める．一方，本研究では，Ω のトモグラフィを減衰係数 $\mu_\mathrm{t} = \mu_\mathrm{a} + \mu_\mathrm{s}$ を再構成する逆問題とし，境界値 I_0 に起因する解 I の不連続性 [2,3] を利用する係数再構成を数値的に扱う．そこでは，$\mu_\mathrm{s}, \mu_\mathrm{a}$ および p を未知とし，Γ_- で適当な粒子の流入を与えて Γ_+ から流出する粒子線密度を観測し，Ω での減衰係数 μ_t を求めて可視化する．ここで，Ω において $\mu_\mathrm{a}, \mu_\mathrm{s}$ のみならず p を未知としている点が本研究で論じる再構成手法の特徴である．2 次元においてはその定量的実現可能性が著者らにより示されたが [4,5], トモグラフィが本質的な 3 次元での RTE は，観測値の生成のために 5 次元の大規模問題の数値計算が必要となる．

2. 境界値の設定と不連続性の数値的実現

本節では，典型的な断層撮影の例として，Ω と交わる平面 $x_3 = Z$ での断層画像 $\{\mu_\mathrm{t}(x) \,;\, x_3 = Z\}$ を得るアルゴリズムを述べる．

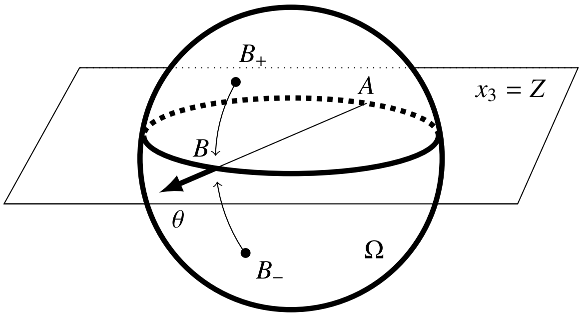
今，$\partial\Omega_\pm = \{x \in \partial\Omega \,;\, x_3 \gtrless Z\}$ とし，Γ_- における境界値 I_0 を

$$I_0(x,\xi) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\partial\Omega_+}; \\ 0, & x \in \partial\Omega_- \end{cases} \quad (2)$$

と定める．ただし $\overline{\partial\Omega_+}$ は $\partial\Omega_+$ の閉包を表す．このとき，適当な仮定下では境界値問題 (1), (2) には有界な解 I がただ一つ存在することが知られている [2]．

次に，相異なる任意の 2 点 $A, B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ に対して

$$\theta = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$



図–1 Boundary points A, B and the direction ξ on the plane $\{x_3 = Z\}$. $B_\pm$ approach to B with $B_\pm \in \partial\Omega_\pm$.

とする (図 1). このとき，$B_\pm \in \partial\Omega_\pm$ のもとで $B_\pm \to B$ とすると，解 I に対して

$$I(B_+,\theta) - I(B_-,\theta) \to \exp\left(-\int_{\overline{AB}} \mu_t \, d\ell\right) \tag{3}$$

が成立する [2,3]. ただし $I(B_\pm,\theta)$ は，解 I の Γ_+ へのトレースを表し，右辺は $\overline{AB}$ に沿う線積分を表す.

$B_\pm$ が B に充分近ければ，左辺に現れる $I(B_\pm,\theta)$ は Γ_+ から流出する粒子密度に相当し，観測可能な量である．すなわち，境界値 I_0 が不連続な平面 $x_3 = Z$ において，解 I も不連続となるが，その不連続量を Γ_+ からの流出密度の観測値の差として求めれば，μ_t のエックス線変換の近似値が得られる．

上述の手順により，任意の 2 点 $A, B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ に対して (3) の左辺の不連続量を観測することで μ_t の sinogram が得られる．これから μ_t への対応は逆 Radon 変換として知られており，その数値計算手法 [6] によって $\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ における μ_t, すなわち断層画像が得られる．ここで，(3) による sinogram の取得においても，逆 Radon 変換の標準的な数値計算手法においても，係数 μ_a, μ_s および散乱核 p の先験情報を必要としないことに注意する．

3. 不連続量の数値計算と減衰係数の数値的再構成

本節では，前節で提案する手法の数値実験をおこない，本手法の定量的実現可能性を示す．

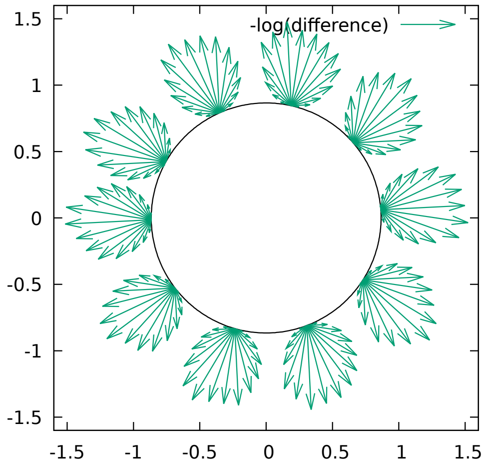
Ω を $\mathbb{R}^3$ の単位球とし，$c_1 = (0.4, 0, 0.5)$, $c_2 = (-0.4(\sqrt{3}-1), 0.4, 0.5)$, $\Omega_1 = \{\, |x - c_1| < 0.15 \,\}$, $\Omega_2 = \{\, |x - c_2| < 0.2 \,\}$, $\Omega_3 = \{\, |x - c_1| < 0.3 \,\}$ とする．散乱係数は Ω で $\mu_s \equiv 0.3$ とし，吸収係数を

$$\mu_a = \begin{cases} 0.2, & x \in \Omega_2; \\ 0.3, & x \in \Omega_3 \setminus \Omega_1; \\ 0.1, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

また散乱核として Henyey-Greenstein 核

$$p(\xi \cdot \xi') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\xi \cdot \xi')^{3/2}}, \quad g = 0.5$$

をもちいる．このもとで境界値問題の数値計算をおこなって観測値を数値的に生成し，そこから $Z = 0.5$ での μ_t を再構成する．



図–2 Measurement data on Γ_+ on $\{x_3 = Z\}$. Arrows stand for discontinuity of outflow in the polar coordinate $(-\log[I_\Delta], \arg\theta)$.

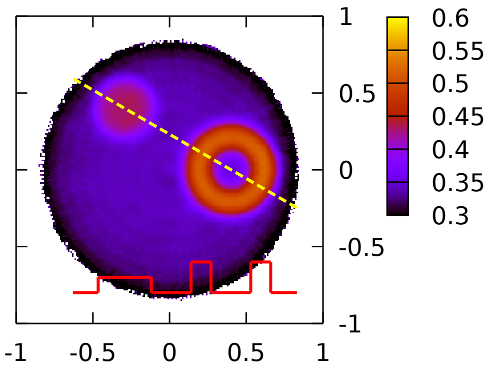
順問題である境界値問題の数値計算では，解 I の不連続性を扱いうる数値計算法の利用が肝要であり [4,5], 本研究では $x \in \mathbb{R}^3$ と $\xi \in S^2$ のいずれについても区分定数近似 [7] をもちいる．そのため gmsh [8] によって平面 $\{x_3 = Z\}$ をメッシュの面に含む Ω の四面体分割を生成する．また S^2 も同様に gmsh により，$\{\xi_3 = 0\}$ をメッシュの辺に含む三角形分割を生成する．本研究では Ω を 4,841,133 個の四面体分割で，また S^2 を 2,986 個の三角形分割で近似した．このとき四面体の辺の最大長は約 0.0364, 三角形の最大長は約 0.126 であり，(1),(2) の離散化による未知数は 14,455,623,138 個であり，これは IEEE754 倍精度で約 107.7 GB に相当する．不連続 Galerkin 法による境界値問題 (1), (2) の離散スキームは連立一次方程式であり，Gauss-Seidel 法により近似解を求めた．SCOTCH [9] による領域分割のもとで OpenMPI と OpenMP によるハイブリッド並列計算をおこなったところ，600 回の反復で残差は 10^{-10} 未満となった．このとき 4 つの AMD EPYC 7643 (48 コア, 合計 192 コア) で要した計算時間は約 196 分であった．

これで得られた (1), (2) の数値解 I_Δ から観測値を以下の手順で定める．四面体分割の頂点ではない任意の $B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ に対し，距離が最短となる四面体が $\Omega \cap \{x_3 > 0\}$, $\Omega \cap \{x_3 < 0\}$ にそれぞれただ一つ存在する．それらを t_+, t_- とする．また θ が三角形分割の頂点でない場合も，θ から距離が最短となる三角形が $S^2 \cap \{\xi_3 > 0\}$, $S^2 \cap \{\xi_3 < 0\}$ にそれぞれただ一つ存在する．それらを ω_+, ω_- とする．このもとで，$B_\pm$ が B に充分近ければ，観測値である流出密度を

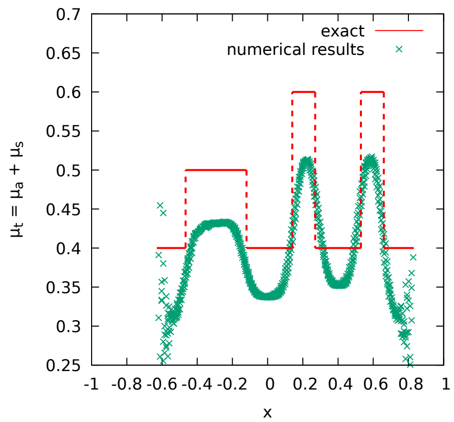
$$I(B_+,\theta) \approx I_\Delta(t_+, \omega_-)$$
$$I(B_-,\theta) \approx I_\Delta(t_-, \omega_+)$$

と近似できる．ここで (3) が成立するために，$B_\pm$ を通り方向ベクトル ξ の直線が I の不連続面 $\{x_3 = Z\} \cap \Omega$ を横切らないよう [2,3]，$t_\pm$ と $\omega_\mp$ の組を選んでいることに注意する．

$(B,\theta) \in \Gamma_+$ に対し，以上で決まる観測値の差である



図–3 Reconstructed attenuation coefficient μ_t on $Z = 0.5$. The red graph indicates exact μ_t.



図–4 Green symbols (×) show reconstructed attenuation coefficient μ_t on the yellow dotted segment in Fig. 3, while red shows exact value.

不連続量

$$[I_\Delta](B,\theta) = I_\Delta(t_+,\omega_-) - I_\Delta(t_-,\omega_+)$$

が (3) の右辺の μ_t のエックス線変換を近似する．図 2 は，不連続量 $[I_\Delta](B,\theta)$ を $B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ を中心として極座標 $(-\log[I_\Delta], \arg\theta)$ で表示したものである．これが μ_t の sinogram に相当する．

この sinogram から A-analyticity による境界積分法 [10,11] により求めた $\Omega \cap \{x_3 = 0.5\}$ での μ_t の断層画像を図 3 に示す．この計算例のメッシュでは，$B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = 0.5\}$ として 393 点，また各 B に対して平均して 32 個の θ をとることができ，再構成に要する計算時間は 1 秒未満であった．また，図中に黄で示す線分 $y = (x-0.4)/\sqrt{3}$ は c_1, c_2 を通るが，この線分に沿う μ_t の再構成された値を図 4 に示す．図 3 より，μ_t の変化は明瞭に捉えられている．図 4 からは，再構成された μ_t の定量値の精度は充分とはいえないものの，その変化量は定量的にも充分捉えているといえる．

4. 結言

本研究では，3 次元の領域での定常 RTE に対し，減衰係数の断層画像取得の数値的な実現可能性を示した．RTE の境界値問題に対して適切な境界値を設定し，その境界値から生じる解の不連続性を考慮したメッシュと区分定数近似を利用し，大規模数値計算によって観測値を生成している．提案手法では，散乱核に関する事前情報がなくとも，減衰係数の変化量が明瞭に捉えられる結果が得られた．この結果は，従来の直進性を本質的に仮定するエックス線トモグラフィでは困難とされていた，連続的に散乱する信号からも断層画像の取得が可能であることを示すものである．

謝辞: 本研究の一部は JSPS 科研費 JP20H01821, JP20K14344, JP21K07593, および JP22K18674 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Arridge, S. R.: Optical tomography in medical imaging, *Inverse Problems*, Vol.15, R41–93, 1999.

[2] Kawagoe, D.: Regularity of solutions to the stationary transport equation with the incoming boundary data, Ph.D. thesis, Kyoto University, 2018.

[3] Chen, I.-K. and Kawagoe, D.: Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography, *Inverse Probl. Imaging*, Vol.13, pp.337–351, 2019.

[4] 藤原宏志，川越大輔，陳逸昆：不連続性にもとづく散乱信号からのトモグラフィの数値的実現，計算工学講演会論文集, Vol.27 (2022).

[5] Chen, I.-K., Fujiwara, H. and Kawagoe, D.: Tomography from scattered signals obeying the stationary radiative transport equation, Proceedings of IMI workshop (accepted).

[6] Kak, A. C. and Slaney, M.: Principles of computerized tomographic imaging, SIAM, 2001.

[7] Fujiwara, H.: Piecewise constant upwind approximations to the stationary radiative transport equation, *Mathematics for Industry*, Vol.34, pp.35–45, 2020.

[8] Geuzaine, C. and Remacle, J. F.: Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.79, pp.1309–1331, 2009. `https://gmsh.info/`

[9] Pellegrini, F.: Software package and libraries for sequential and parallel graph partitioning, static mapping and clustering, sequential mesh and hypergraph partitioning, and sequential and parallel sparse matrix block ordering, `https://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/`

[10] Bukhgeim, A. L.: Inversion formulas in inverse problems, in *Linear Operators and Ill-posed Problems* by Lavrentiev, M. M. and Savalev, L. Ya., pp.323–378, 1995.

[11] Fujiwara, H. and Tamasan, A.: Numerical realization of a new generation tomography algorithm based on the Cauchy-type integral formula, *Adv. Math. Sci. Appl.*, Vol.28, pp.413–424, 2019.