

# CUBE フレームワークを利用した ボクセルトポロジー最適化による固有値最大化

Eigenvalue maximization by voxel topology optimization using CUBE framework

和田 有司<sup>1)</sup>, 嶋田 宗将<sup>2)</sup>, 西口 浩司<sup>3)</sup>, 岡澤 重信<sup>4)</sup>, 坪倉 誠<sup>2) 5)</sup>  
Yuji Wada, Tokimasa Shimada, Koji Nishiguchi, Shigenobu Okazawa, and Makoto Tsubokura

<sup>1)</sup>東京工業大学 未来産業技術研究所 (〒 226-8503 神奈川県横浜市緑区長津田町 4259-R2-26, E-mail: ywada@sonic.pi.titech.ac.jp)

<sup>2)</sup>理化学研究所 計算科学研究センター (〒 650-0047 兵庫県神戸市中央区港島南町 7-1-26)

<sup>3)</sup>名古屋大学 大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町)

<sup>4)</sup>山梨大学 工学域 機械工学系 (〒 400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11)

<sup>5)</sup>神戸大学 システム情報学研究科 (〒 657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1)

Topology optimization to obtain a conceptual structure of an automobile frame that satisfies NVH performance from a large domain of metal blocks requires a small volume fraction constraint and sufficient element resolution. In this study, we implemented a voxel topology optimization framework based on the CUBE framework to perform eigenvalue maximization of the structure in a massively parallel environment and measured its parallelization performance.

**Key Words :** Topology optimization, Finite element method, Building-cube method, Eigenvalue analysis, Locally optimal block preconditioned conjugate gradient method

## 1. 背景

トポロジー最適化<sup>[1-4]</sup>は、許容された設計空間の中で目的関数を最大または最小となるよう部材・材料の配置を空隙含めて決定する最適化手法のひとつで、設計者に有効な示唆をもたらすものとして、近年産業応用が進んでいる。三次元構造物の設計にはボクセルトポロジー最適化<sup>[2]</sup>がよく知られており、大設計領域で三次元構造物を設計する際に剛性マトリクスの再計算が不要であるため大きく計算量を削減することできる。トポロジー最適化の大規模化については、数百万から数億要素規模で体積制約 1-10% 程度の計算例が報告されている<sup>[5-7]</sup>。この反面、自動車フレームにおいては、設計者が期待する設計領域に対して実際の材料が通る体積は 1% 以下であり、解像度不足によりこのような要求に答えられていない現状がある。

自動車フレームの設計においては、静剛性だけではなく NVH(Noise, Vibration, Harshness) 性能の向上もまた期待される。トポロジー最適化を利用して固有値<sup>[8]</sup>や動剛性<sup>[8-10]</sup>の最大化については報告されているが、大規模並列環境における最適化性能に関する検討は限定されている。

著者ら<sup>[11,12]</sup>は大領域・高解像度・低体積制約を実現するトポロジー最適化フレームワークの構築と最適化性能に関する検討を行っている。理化学研究所により開発されている階層直交格子を利用した有限体積法流体解析ソフトである CUBE<sup>[13]</sup>は、Building Cube Method(BCM)<sup>[14]</sup>を利用することで超並列計算機環境においてメモリ分散環境での高い並列化効率を得ることできる。BCM は解析空間を CUBE と呼ばれるセル集合で分割することにより直交格子による離散化を行い、

CUBE における流体解析は埋め込み境界法で形状の表現を行う。西口らは BCM を利用した VOF 法によるオイラー型有限体積法による強連成の流体構造連成解析<sup>[15]</sup>、およびマーカー粒子による構造解析<sup>[16]</sup>を提案している。また嶋田らは CUBE におけるマーカー粒子を用いた流体構造連成解析を提案している<sup>[17]</sup>。

本研究では上記の BCM ボクセルトポロジー最適化フレームワークを利用して、構造体の固有値の最大化に関するトポロジー最適化を実装し、その性能について検討する。巨大並列環境での固有値ソルバとしては Locally Optimal Block Preconditioned Conjugate Gradient (LOBPCG) 法<sup>[18,19]</sup>を使用する。

本稿では、スーパーコンピューター富岳<sup>[20]</sup>を利用した大並列環境において、CUBE 環境で実装された LOBPCG 法の並列化性能の検討、トポロジー最適化の例題でその精度を確認した後に、車体ホワイトボディフレーム規模の大規模・低体積制約ボクセルトポロジー最適化について検討する。

## 2. CUBE フレームワーク内の固有値ソルバ

Fig.1 にボクセルトポロジー最適化フレームワークを示す。ユーザーは CAD 等で作成した設計領域をに対して、(A) 形状を表現するのに十分な精度で要素分割したメッシュファイルを準備し、同時に境界条件を適用する範囲を示す領域も同ファイルに三次元要素として追加する。このモデルで解析をするわけではないので要素サイズや要素品質は悪く問題ない。

この有限要素モデルを一度 STL に変換するなどして、BCM 格子生成ソフト (Gridgene<sup>[21]</sup>) へ入力し、必要な解像度を指定した上で (B)BCM グリッドファイルを準

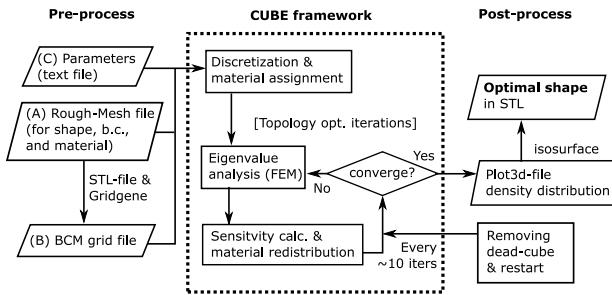


Fig.1 Procedure of topology optimization using CUBE framework.

備する。トポロジー最適化フレームワークでは階層直交格子生成機能を抑制するのと、構造内部に流体点を指定して設計領域が解析領域外にならないように留意する。CUBE グリッドの生成は長くとも数分で完了する。

トポロジー最適化は (A) 形状ファイルと (B) BCM グリッドファイル、および (C) 最適化設定ファイルで動作する。形状ファイル情報から各セルに初期密度情報を設定する離散化処理はプログラム中で長くとも数十分で完了し、以降は CG 法ソルバによる有限要素解析と最適性規準法<sup>[1]</sup>による密度再分配が反復される。

本フレームワークの利点は、このプレ処理の軽量性と高速性である。 (A)(B) の両ファイルは大きくとも 1 Mbyte 以下で容易に編集できる。一般的な非構造格子の有限要素法トポロジー最適化でも四面体要素を使用すれば自動メッシュは可能であるが、数百万要素を超えたあたりからメッシュファイルが巨大になり編集性が著しく低下する。また、一度メッシュを切ってしまうと解像度の変更には再度高負荷なメッシュ分割を繰り返す必要がある。本手法では解像度の変更も (B) グリッドファイルの再生成により容易に可能である。

本稿のトポロジー最適化は SIMP 法<sup>[3]</sup>を用いる。各セルには空隙と母材の間の中間密度状態  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) を許容し、密度の再配分により最終的な密度状態を決定するものである。中間材料の剛性はそのヤング率が密度のべき乗  $p$  (通常は  $p = 3$ ) に比例するものとして扱うことで剛性のスケーリングをする。要素の質量は密度に比例するものとする。密度  $\rho$  は階層直交格子のセル中心に定義される。構造体の形状はこのグレースケールの濃淡で表現される。一方で、有限要素法の自由度は各セルの節点に配置される。

直交格子領域における初期設計領域が存在しない領域や、密度が  $\rho_{del}$  を下回ったセルは、剛性をもたない空隙  $\rho = 0$  として取り扱う。この際に、空隙セルのみに囲まれた節点自由度については数値的不安定を抑制するために拘束するものとする。

直交格子領域は CUBE と呼ばれるセルの直方体集合単位により分割され、各 CUBE ごとに MPI プロセスに割り当てることで並列処理を実施する。領域の接続はセル中心および節点物理量とも MPI プロセスによる袖領域の交換で達成される。セル中心・節点物理量の両方を接続する関係上、流体計算における BCM の利点の一つである二倍領域との階層接続は不可能である。しかしながら、初期設計領域のサイズに対応してコネク

ティビティを有する CUBE 領域に分割することで、単純な直交格子法と比べて使用メモリや計算量を削減することができる。

セル  $j$  の剛性行列  $[k_j]$  および質量行列  $[m_j]$  はセルの密度  $\rho_j$  を用いて下記のように表すことができる。質量行列は固有値ソルバの計算量から集中質量行列を使用する。

$$[k_j] = \rho_j^p [k_e], [m_j] = \rho_j [m_e] \quad (1)$$

$$[k_e] = \int [B^T] [c_0] [B] d\Omega \quad (2)$$

$$[m_e] = \mathbf{I} \int (d/8) d\Omega \quad (3)$$

$B, c_0, d_0, \mathbf{I}, \Omega$  行列はそれぞれ形状関数のひずみ行列、母材の弾性率テンソル、母材の重量密度、単位テンソル、セル体積である。ボクセルトポロジー最適化の大きな利点として、すべてのセルで要素形状が等しいためあらかじめ  $[k_e], [m_e]$  を計算しておけば各セルの剛性・質量行列はこれらの定数倍で容易に計算できる点にある。これは CG 法など行列積を繰り返して進行するソルバにおいて、計算負荷の大きい要素剛性行列をメモリに保持したり再計算しなくて済むので計算量を大きく削減することができる。

固有値最大化における  $i$  番目の固有値  $\lambda_i$  に関する要素  $j$  の感度は、固有ベクトル  $\mathbf{x}$  が質量行列で正規化されているとき下記の式で表すことができる。

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho_j} = \mathbf{x}_i^T \left( \frac{\partial [k_j]}{\partial \rho_j} - \lambda_i \frac{\partial [m_j]}{\partial \rho_j} \right) \mathbf{x}_i \quad (4)$$

チェックカーボード密度分布の抑制のために最近傍要素との空間平均<sup>[3, 11]</sup>を適用する。事前に感度を正側にバイアスした後、密度の再分配には最適性規準法<sup>[1, 8]</sup>を使用する。

また、最適化反復の途中に構造体の一部が主たる構造から遊離して固有値算出に悪影響を及ぼすことがある。この対策としては、遊離部分の構造を空隙とすることで対策する。遊離構造の検出には、要素感度のうちひずみエネルギーが主となる正の応力感度が感度平均より高くなるセルに主要構造部フラグを与え、塗りつぶしアルゴリズムの要領で構造の連結している隣接セルにフラグを伝搬する。伝搬を反復してもフラグを有さないセルが遊離構造と判定される。

### 3. LOBPCG 法と大規模並列化効率

本研究で利用する LOBPCG 法 (CG 法) のアルゴリズムを下記に示す。ただし、 $\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{y}_i$  がそれぞれモード番号  $i$  に対する LOBPCG における解、残差、探索方向、作業領域ベクトルである。要求モード数を  $M$  とする。 $\mathbf{c}=(1:自由, 0:拘束)$  が自由度の拘束状態を設定するベクトルであり、事前に空隙要素 ( $\rho = 0$ ) の探索を行い空隙要素に囲まれた節点の自由度について  $\mathbf{c}$  ベクトルの該当要素をゼロとすることで拘束する。 $\mathbf{m}$  は対角化全体質量行列ベクトルで事前に質量行列  $m_j$  を積算することで求めておく。 $\mathbf{m}$  は配列積 (アダマール積) とする。 $\epsilon_{tol}$  は相対残差の終了条件である。

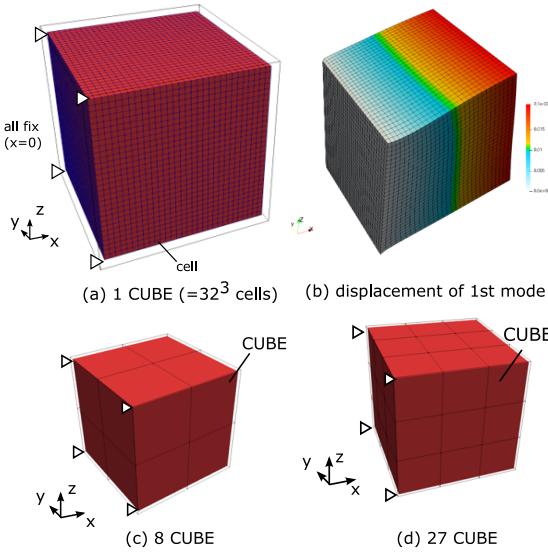


Fig.2 Cubic cantilever, the problem for the weak scaling measurement.

1.  $\mathbf{x}_i := \{\text{normalized random vector}\}, \mathbf{p}_i := 0$
2.  $\mu_{i0} = \mathbf{x} \cdot A(\mathbf{x}), r_{i0} = |A(\mathbf{x}) - \mu_{i0}B(\mathbf{x})|$
3.  $\mathbf{x}_i := \{\text{initial guess from previous topology iteration}\}$
4. **do loop:**
5.  $\mu_i = \mathbf{x} \cdot A(\mathbf{x}), \mathbf{w}_i := A(\mathbf{x}) - \mu_i B(\mathbf{x})$
6.  $r_i = |\mathbf{w}_i|, \text{normalize } \mathbf{w}_i$
7. **break if**  $\max(r_i/r_{i0}) < \epsilon_{\text{tol}}$
8.  $Z := [\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_i, \mathbf{p}_i]$
9.  $S_A := Z^T A(Z), S_B = Z^T B(Z)$
10.  $[\lambda_i, V] := \text{dsygv}(S_A, S_B), V := (\beta_{ki}, \alpha_{ki}, \gamma_{ki})^T$
11.  $\mathbf{y}_i := \sum_k \alpha_{ki} \mathbf{w}_k + \beta_{ki} \mathbf{x}_k + \gamma_{ki} \mathbf{p}_k, \mathbf{x}_i := \text{normalize}(\mathbf{y}_i)$
12.  $\mathbf{y}_i := \sum_k \alpha_{ki} \mathbf{w}_k + \gamma_{ki} \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_i := \text{normalize}(\mathbf{y}_i)$
13. **end loop**

dsygv は  $(3M \times 3M)$  規模の対称な小規模密行列に対する一般化固有値問題の求解であり  $\lambda_i$  が固有値,  $V$  が固有ベクトルである。本研究ではヤコビ法を使用している。剛性行列に関する行列積  $A(\mathbf{x})$  は下記の手順で算出する。

1. **function**  $A(\mathbf{x})$ :
2.  $\mathbf{y} = \mathbf{c} \circ \sum_j [k_j] \mathbf{x}$
3. **return**  $\mathbf{y}$  after Halo communication

質量行列に関する行列積  $B(\mathbf{x})$  および正規化処理は下式の通り。

$$B(\mathbf{x}) = \mathbf{m} \circ \mathbf{x} \quad (5)$$

$$\text{normalize}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} / \sqrt{\mathbf{x} \cdot B(\mathbf{x})} \quad (6)$$

上記の LOBPCG 法で保持すべきメモリの最低量は、上の状態ベクトルと各要素の密度と目的関数に対する感度であり、 $(3 \times (4M + 2) + 2) \times (\text{セル数})$  となる。本研究では全体剛性行列を作成しないため、この分のメモリは必要としない。なお、実際の実装では追加の作業領域とセル物理量を 5 つ保持する圧縮性流体フレームワークの流用のため  $(5 \times (4M + 4) + 5) \times (\text{セル数})$  のメモリを確保している。

Fig.2(a) のような立方体状の領域に対して、 $x = 0$  側面を完全拘束した片持はりの固有振動モードを算出す

Table1 Problem settings for weak scaling measurement. Note that 1 CUBE is  $32^3$  cells; and  $k=10^3$ ,  $M=10^6$ , and  $G=10^9$ .

CPUs(=CUBEs)	DOFs	Fugaku Nodes
1	86.5k	1
8	739k	1
27	2.54M	1
64	6.10M	2
216	20.8M	5
512	49.5M	11
4 096	400M	86
32 768	3.21G	683
262 144	25.7G	5462

る問題を用いて計算速度性能を検討する。袖領域の取り扱いの関係上、材料は計算領域に対して 1 要素後退した位置に配置する。例えば、この問題を  $32^3$  セルの 1CUBE で準備するとき、構造要素は  $30^3$  だけ配置することになる。本稿通して、設計領域の材料は鋼材を想定し、ヤング率 200 GPa、ポアソン比 0.3 を使用するものとする。等しい構造を有するモデルを市販の有限要素法ソフト (LS-DYNA R13.1) の結果と固有周波数を比較し、 $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-8}$  とすると倍精度浮動小数の精度で結果が一致するのを確認している。

このような問題に対して、ウェークスケーリング性能を測定する。計算機 1 コアあたり 1CUBE(=32<sup>3</sup> セル) を処理させる点は変更せず、Fig.2(b) のように領域を相似的に分割することで、使用コア数と問題の規模を同時に拡大し CG 法部分の計算時間の変化を測定する。LOBPCG 法は自由度が大きくなると相対残差基準での収束回数が増加するが、今回は計算速度の測定であるため反復回数は 1000 回で固定とした。

Table 1 に計算ケースと使用セルと自由度を示す。CUBE 環境で有限要素法を運用する都合で最外セルには要素を配置していないためセル数から単純に自由度を計算できない点に注意されたい。計算には理化学研究所のスーパーコンピューター富岳<sup>[20]</sup>を使用した。富岳は 1 ノードあたり 48 演算コアを有するので、1 ノードあたり 48CUBE を割り当てる事となる。また、高帯域メモリを共有し 12 演算コアを 1 単位とする CMG(Core Memory Group) 単位でのプロセス分割が有効とされている。本報告では、MPI+OpenMP ハイブリッド並列を 1CMG あたり 1 プロセス (1 ノードあたり 4 プロセス) で実施した。

Fig. 3 に、要求モード  $M=1, 2, 4$  としたときの問題の規模 (CUBE 数) と計算時間の関係を示す。比較のために静剛性解析の場合の計算時間<sup>[11]</sup>も同時に示している。固有値計算においても、並列性能は問題の拡大に対してほとんど変化せず、大規模並列環境を活かせる性能を示しているといえる。262 kCUBE のときの計算速度は 1CUBE の場合と比較して、 $M=1, 2, 4$  のときそれぞれ 0.50, 0.54, 0.58 であった。

静剛性は CG 法の 1 反復あたりの剛性行列積演算が 1 回であるのに対して、LOBPCG 法は 1 反復で 3M 回

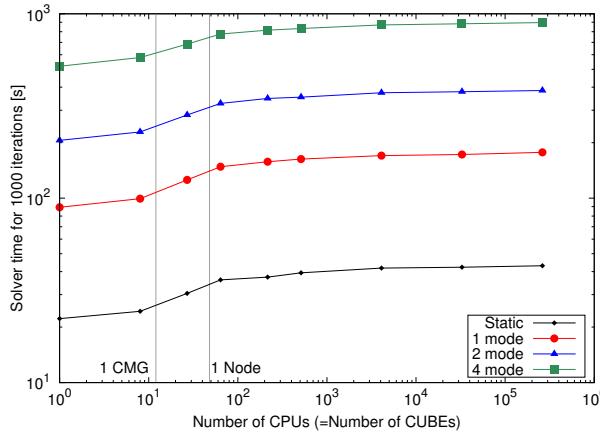


Fig.3 Weak scaling characteristic of PCG solver with 1,000 iteration.

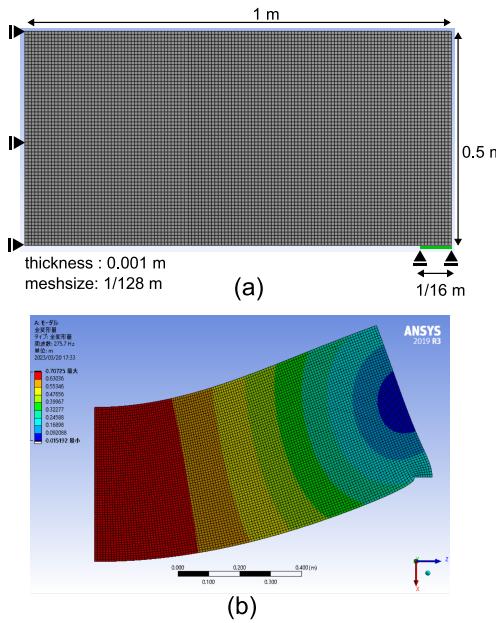


Fig.4 (a) Simple beam half model boundary conditions and (b) first bending mode.

の剛性行列積演算と  $6M$  回の質量行列積演算を必要とする。262 kCUBE のとき、静剛性に対する計算時間の比は  $M = 1, 2, 4$  のときそれぞれ 4.12, 8.91, 20.82 であり、概ね要求モード数に相応しい計算量の増加であると理解できる。

#### 4. 単純梁の固有値最大化検証

Fig.4(a) に示す単純梁のトポロジー最適化を実施し、市販のトポロジー最適化プログラム (ANSYS 2019R3, Mechanical Workbench) と比較することでその性能を評価する。計算モデルは高さ 0.5 m, 中央から梁端までの長さ 1m の 1/2 対称モデルを想定し、梁端から 1/16 (=0.0625) m の領域を高さ方向に滑り拘束する。面内メッシュサイズは 1/1128 (=0.0078125) m, ANSYS 側の設定の都合により厚み方向 0.001 m の三次元要素を使用し、厚み (y) 方向片側面の面外方向変位は拘束する。最適化対象モードは (b) に示す 1 次の曲げ振動とする。

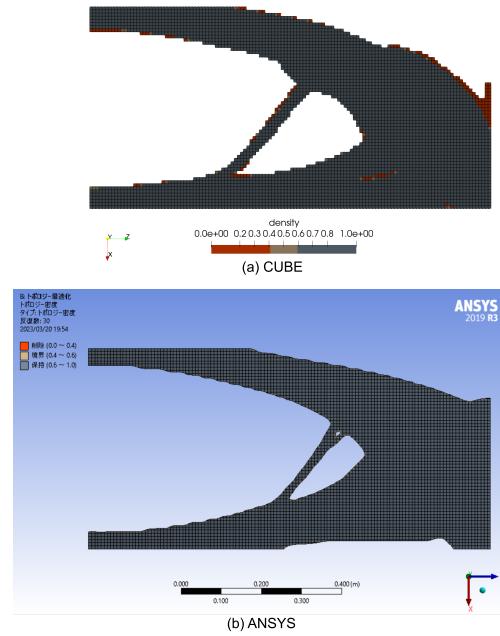


Fig.5 Optimal shape of first bending mode frequency maximization.

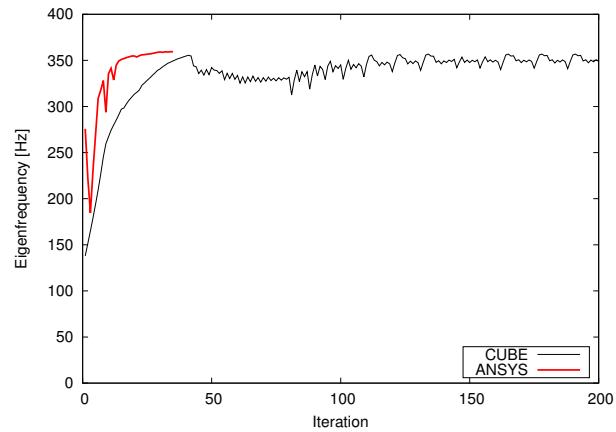


Fig.6 Eigenfrequency history of eigenvalue optimization.

CUBE 側の設定として、低密度要素を空隙と判定する要素削除密度は現在の設計領域の最大密度  $\rho_{max}$  を使用して、下記を使用した。

$$\rho_{del} = 0.05\rho_{max} \quad (7)$$

静剛性<sup>[11]</sup>で一般的に使用される削除密度より大きい  $\rho_{del}$  値を利用するには、低密度要素の音速低下による要素単位の不安定振動を抑制するためである。

Fig.5(a) に CUBE での最適形状、(b) に ANSYS の最適形状を示す。細部の梁の形成や密度分布に若干差はあるが、概ね同じ意図を示す形状が得られている判断できる。

Fig.6 に最適化反復と 1 次モード周波数の履歴を示す。CUBE の反復最終値が 349 Hz であるのに対して、ANSYS は 359 Hz であり、性能は 97% に留まる結果になった。また CUBE は一度周波数において極大値をとっているものの、中間密度部分を排除するために ANSYS

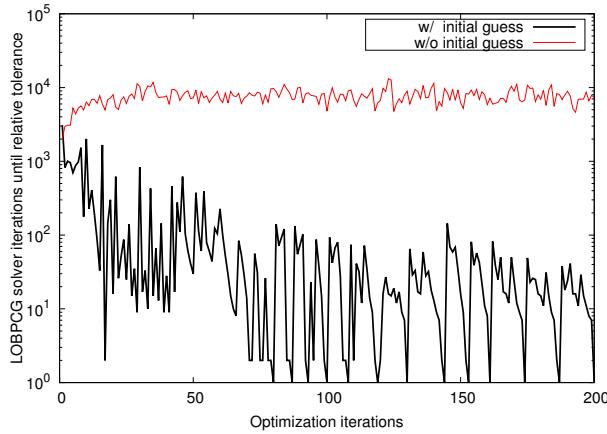


Fig.7 LOBPCG solver iterations until relative tolerance with and without initial guess.

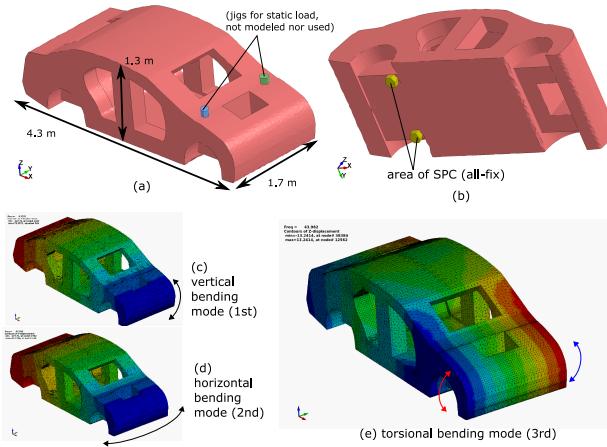


Fig.8 Boundary conditions and eigenmodes for vehicle frame optimization.

より多くの最適化反復を必要としている。これは今回既実装のバイアス付き最適性規準法を用いて最適化を実施したのが理由であり、CONLIN<sup>[22]</sup> や MMA<sup>[23]</sup> など感度が正負に及ぶことが正しく想定されている数値最適化手法を用いることで改善することが予想される。

Fig.7 に CUBE における固有値最大化において、LOBPCG の初期値を最適化前反復における固有ベクトル初期値を与えた場合とそうでない場合の LOBPCG の反復数を示す。相対残差は  $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$  を使用した。初期値を使用した場合は大きく反復回数が低減可能であり、最適化全体で合計反復数を 97% 低減することができる。

## 5. 車体フレームの固有値最大化

Fig.8(a),(b) に車体フレーム形状を模した初期形状と境界条件を示す。本形状は CCSA で公開されている有限要素モデルである TOYOTA Yaris 2010<sup>[24]</sup> のフレーム部位を概ね覆うように CAD で作成し、形状表現が維持される程度のメッシュサイズで要素分割したものである。図中の車体部に配置された円筒構造が境界条件の範囲指定であり、有限要素法としてはモデル化されず、該当する範囲の節点に単点拘束や節点荷重を与える。今回は

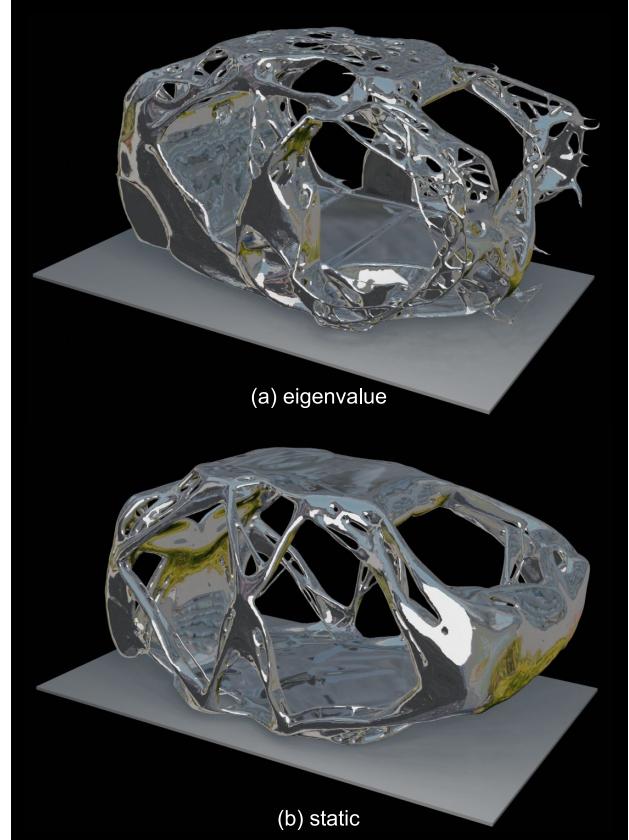


Fig.9 Optimal shape of (a) eigenvalue and (b) static optimization.

荷重条件は使用しないので (a) のほうの円筒領域は使用しない。母材設計領域は 4454 L(重量 35 t) である。

Fig. 8(c)–(e) に低次の固有モードを示す。最適化の目的としては 3 次のねじり振動モードの固有値周波数を最大化することである。体積制約は 5 % (体積 222L、重量 1.74 t 相当) とし、モードの遷移による不安定性を抑制するために要求モード数は 4 とする。LOBPCG 法の相対残差は  $10^{-5}$  とする。

上記のモデルをセルの解像度 10 mm, 1 CUBE=16<sup>3</sup> セルで分割した結果、CUBE 数は 5648、全セル数は 2313 万、初期構造の自由度数 3727 万となった。最適化はを富岳 118 ノード、471 プロセス (1 プロセス 12 共有メモリ並列) で実行した。最適化時間は 38.5 時間であった。

Fig.9 に固有値最大化後の最適形状を示す。参考のために、同解像度での静剛性ねじり荷重最大化結果を示す。両者ともねじり変形に対する剛性を増加させる方向の最適化であるため形状に共通点が多い。この反面、固有値最大化と静剛性最大化の違いとしては、前節の単純梁のように固定点近傍に材料を集めることで固有周波数を増加させる作用が (a) の固有値最大化のトポロジーでは見られる点と梁自身の共振を抑制するために微細な形状が発生しやすいことが挙げられる。

## 6. 結論

大領域の金属ブロックから NVH 性能を満足する自動車フレームの概念構造をトポロジー最適化で得るには、数%以下の体積制約と十分な要素解像度を要する。本研

究では CUBE フレームワークと LOBPCG 法を利用したボクセルトポロジー最適化フレームワークを実装することで、超並列環境下で構造物の固有値最大化を実施し、単純梁と車体フレームの例題を通して最適化性能を測定した。

**謝辞:** 本研究は、HPCI システム利用研究課題(課題番号:hp220172, hp220249)を通じて、理化学研究所のスーパーコンピュータ「富岳」の計算資源の提供を受け、実施しました。

## 参考文献

- [1] M.P. Bendsøe, and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.71, no.2, pp.197-224, 1988.
- [2] 藤井大地, パソコンで解く構造デザイン, 丸善, 2002.
- [3] M.P. Bendsøe, *Topology Optimization: Theory, Methods, And Applications*, Springer, 2003.
- [4] 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池昇, トポロジー最適化(計算力学レクチャーコース), 一般社団法人日本計算工学会(編), 丸善出版, 2013.
- [5] T. Borrrell, and J. Petersson, "Large-scale topology optimization in 3d using parallel computing," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.190, no.46, pp.6201-6229, 2001.
- [6] J. Baiges, J. Martínez-Frutos, D. Herrero-Pérez, F. Otero, and A. Ferrer, "Large-scale stochastic topology optimization using adaptive mesh refinement and coarsening through a two-level parallelization scheme," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.343, pp.186-206, 2019.
- [7] T.W. Chin, M.K. Leader, and G.J. Kennedy, "A scalable framework for large-scale 3d multimaterial topology optimization with octree-based mesh adaptation," *Advances in Engineering Software*, vol.135, p.102682, 2019.
- [8] Z.D. Ma, N. Kikuchi, and I. Hagiwara, "Structural topology and shape optimization for a frequency response problem," *Comput. Mech.*, vol.13, no.3, pp.157-174, Dec 1993.
- [9] S. Nishiwaki, K. Saitou, S. Min, and N. Kikuchi, "Topological design considering flexibility under periodic loads," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol.19, no.1, pp.4-16, Mar 2000.
- [10] L. Shu, M.Y. Wang, Z. Fang, Z. Ma, and P. Wei, "Level set based structural topology optimization for minimizing frequency response," *Journal of Sound and Vibration*, vol.330, no.24, pp.5820-5834, 2011.
- [11] 和田有司, 嶋田宗将, 西口浩司, 岡澤重信, 坪倉誠, "Building cube method を利用した車体フレームのボクセルトポロジー最適化," *日本計算工学会論文集*, vol.2021, pp.20210019-20210019, 2021.
- [12] 和田有司, 嶋田宗将, 西口浩司, 岡澤重信, 坪倉誠, "車体構造のトポロジー最適化における板金形成の促進," *計算工学講演会論文集* Vol. 27, pp.F-03-06, june 2022.
- [13] N. Jansson, R. Bale, K. Onishi, and M. Tsubokura, "CUBE: a scalable framework for large-scale industrial simulations," *The International Journal of High Performance Computing Applications*, vol.33, no.4, pp.678-698, 2019.
- [14] K. Nakahashi, "Building-cube method for flow problems with broadband characteristic length," *Computational Fluid Dynamics 2002*, eds. S.W. Armfield, P. Morgan, and K. Srinivas, pp.77-81, Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [15] K. Nishiguchi, R. Bale, S. Okazawa, and M. Tsubokura, "Full eulerian deformable solid-fluid interaction scheme based on building-cube method for large-scale parallel computing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.117, no.2, pp.221-248, 2019.
- [16] 西口浩司, 嶋田宗将, 大高雅史, 岡澤重信, 坪倉誠, "ラグランジュマーカー粒子を用いたオイラー型有限体積法による圧縮性固体解析," *土木学会論文集 A2 (応用力学)*, vol.75, no.2, pp.I237-I248, 2019.
- [17] T. Shimada, K. Nishiguchi, R. Bale, S. Okazawa, and M. Tsubokura, "Eulerian finite volume formulation using lagrangian marker particles for incompressible fluid-structure interaction problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.123, no.5, pp.1294-1328, 2022.
- [18] A.V. Knyazev, "Toward the optimal preconditioned eigensolver: Locally optimal block preconditioned conjugate gradient method," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol.23, no.2, pp.517-541, 2001.
- [19] 日本計算工学会編, 固有値計算と特異値計算, 丸善出版, 東京, Japan, 12 2019.
- [20] 理化学研究所計算科学研究センター (R-CCS), "システム紹介," URL:<https://www.r-ccs.riken.jp/jp/fugaku/overview/system.html>, 2020, (参照 2021-03-24).
- [21] T. Ishida, S. Takahashi, and K. Nakahashi, "Efficient and robust cartesian mesh generation for building-cube method," *Journal of Computational Science and Technology*, vol.2, no.4, pp.435-446, 2008.
- [22] C. Fleury, "Conlin: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts," *Structural optimization*, vol.1, pp.81-89, 1989.
- [23] K. Svanberg, "The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.24, no.2, pp.359-373, 1987.
- [24] Center for Collision Safety and Analysis, "2010 toyota yaris coarse finite element model version 11," URL:<https://www.ccsa.gmu.edu/models/2010-toyota-yaris>, dec 2016, (参照 2020-10-01).