

均質化弾塑性構成則の代理モデルによるマルチスケール解析

Surrogate Modeling of Homogenized Elastoplastic Constitutive Laws
for Decoupled Multiscale Analysis

中山耀介¹⁾ 松原成志郎²⁾ 平山紀夫³⁾ 森口周二⁴⁾ 寺田賢二郎⁵⁾
Yosuke Yamanaka, Seishiro Matsubara, Norio Hirayama, Shuji Moriguchi and Kenjiro Terada

¹⁾修(工)東北大学工学研究科(〒980-8572宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: yosuke.yamanaka.s7@dc.tohoku.ac.jp)

²⁾博(工)名古屋大学工学研究科(〒464-8603愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: seishiro.matsubara@mae.nagoya-u.ac.jp)

³⁾博(工)日本大学生産工学部機械工学科(〒275-8575千葉県習志野市泉町1-2-1, E-mail: hirayama.norio@nihon-u.ac.jp)

⁴⁾博(工)東北大学工学研究科(〒980-8572宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: s_mori@irides.tohoku.ac.jp)

⁵⁾博(工)東北大学工学研究科(〒980-8572宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: tei@irides.tohoku.ac.jp)

We propose a new surrogate modeling for homogenized elasto-plastic material behavior. At first, to obtain the macroscopic stress-strain relationships, we conduct numerical material tests on a representative volume element (RVE) of a heterogeneous material. Arranging these macroscopic material responses, we obtain a data set of the macroscopic constitutive relationship. Using this data set, we construct a surrogate model by means of radial basis function interpolation and perform optimization of hyperparameters. In the presentation, surrogate computations of the load / unload problem of an elastoplastic material are carried out to verify the feasibility of the proposed method.

Key Words : Multiscale analysis, Computational homogenization, Elastoplasticity, RBF interpolation, Surrogate modeling

1. はじめに

分離型マルチスケール解析手法は微視的(ミクロ)構造に非均質性を有する材料の巨視的(マクロ)な力学挙動を予測可能とする手法であり、計算コストの面で優れることで知られている。しかし、この手法は材料の均質化された力学挙動を表現可能なマクロ構成則を必要とし、その定式化が困難となる場合がある。このような問題は、Helmholtzエネルギーに加えてマクロ降伏関数やマクロ塑性ポテンシャルの定式化が必要となる弾塑性材料において顕著である。そこで本研究では、分離型マルチスケールにおけるマクロ弾塑性構成則の代理モデルを開発する。

2. 2スケール境界値問題

図-1に示すような、周期的なミクロ構造(ユニットセル)で構成された非均質材料の準静的釣り合い問題を考える。数学的均質化理論[3]に倣ってミクロ座標を y 、マクロ座標を x でそれぞれ表すと、マクロひずみ $\tilde{\epsilon}(x)$ とミクロ変位 $u(x, y)$ はマクロ変位 $\tilde{u}(x)$ を用いて以下のように与えられる。

$$\tilde{\epsilon}(x) = \frac{1}{2} \left(\nabla_x \tilde{u}(x) + (\nabla_x \tilde{u}(x))^T \right), \quad (1)$$

$$u(x, y) = \tilde{\epsilon}(x) \cdot y + u'(x, y), \quad (2)$$

ここで、 $u'(x, y)$ はミクロ構造内で周期的に分布する擾乱変位である。また、式(2)より、ミクロひずみ $\epsilon(x, y)$

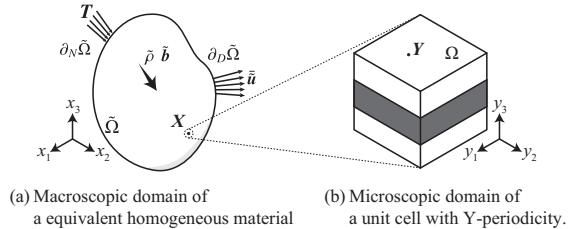


図-1 2スケール境界値問題におけるマクロおよびミクロ領域

は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \epsilon(x, y) &= \frac{1}{2} \left(\nabla_y u(x, y) + (\nabla_y u(x, y))^T \right) \\ &= \tilde{\epsilon}(x) + \frac{1}{2} \left(\nabla_y u'(x, y) + (\nabla_y u'(x, y))^T \right) \end{aligned} \quad (3)$$

このミクロひずみの体積平均は、擾乱変位の周期性および式(3)より明らかにマクロひずみと一致する。

$$\tilde{\epsilon}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \epsilon(x, y) d\Omega, \quad (4)$$

ここに、 $|\Omega|$ はユニットセルの体積である。同様に、次の周期境界条件が境界 $\partial\Omega^{[\pm J]}$ 上に課される。

$$u'^{[+J]}(x, y) - u'^{[-J]}(x, y) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

ここで、上付き文字 $[\pm J]$ は境界 $\partial\Omega^{[\pm J]}$ 上の値であることを示している。

これらの条件の下でミクロ変位 $u(x, y)$ を求めるミクロ境界値問題は以下のように定義される。

$$\nabla_y \cdot \sigma(x, y) = \mathbf{0}, \quad \forall y \in \Omega, \quad (6)$$

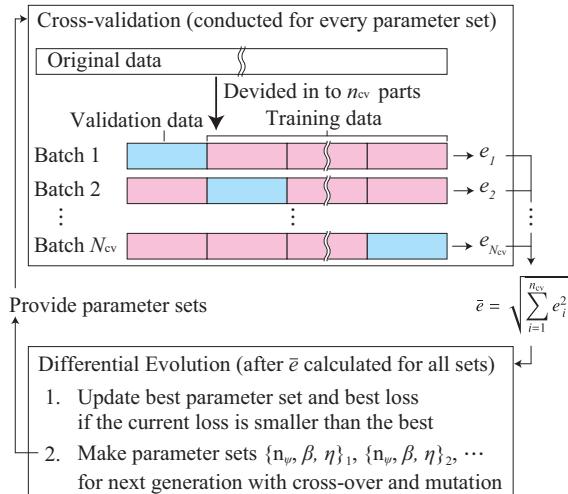


図-2 パラメータ最適化のアルゴリズム

ここで、 $\sigma(x, y)$ はミクロ応力であり、式(3)のミクロひずみと任意の材料構成則を用いて決定される。

一方、マクロ応力 $\tilde{\sigma}(x)$ に関する釣り合い式は次のように与えられる。

$$\nabla_x \cdot \tilde{\sigma}(x) + \tilde{\rho}b = \mathbf{0}, \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad (7)$$

ここに、 $\tilde{\rho}$ は均質化された質量密度であり、 b は加速度である。式(7)を用いてマクロ変位 $\tilde{u}(x)$ を求めるためには、適切な境界条件を設定するとともに、マクロひずみ $\tilde{\epsilon}(x)$ とマクロ応力 $\tilde{\sigma}(x)$ の適切な関係式を決定する必要がある。 $\tilde{\sigma}(x)$ の具体的な関数形を均質化理論から導出することはできないが、Hill-Mandel の原理 [2] より次の条件が与えられる。

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(x, y) d\Omega. \quad (8)$$

すなわち、マクロ応力はミクロ応力の体積平均と等価であり、これによりミクロな力学的挙動を間接的にマクロ境界値問題へと反映することが可能となる。

弾塑性材料を対象とする場合、擬似時間 t を導入して増分的にこれらの境界値問題を解くことが一般的である。これ以降では、下付き文字 $n+1$ を用いて時刻 $t = t_{n+1}$ における値であることを表すこととする。

3. 代理モデルの定式化

(1) RBF 補間

従来の分離型マルチスケール解析において、式(8)のマクロ応力 $\tilde{\sigma}$ はマクロ弾塑性構成則を用いて求められる。一般的なマクロ弾塑性構成則では、時刻 $t = t_{n+1}$ におけるマクロ応力 $\tilde{\sigma}_{n+1}$ はマクロ内部エネルギー \tilde{U} とマクロひずみ $\tilde{\epsilon}_{n+1}$ を用いて次式から得ることができる。

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \partial_{\tilde{\epsilon}} \tilde{U}_{n+1}(\tilde{\epsilon}_{n+1}) \quad (9)$$

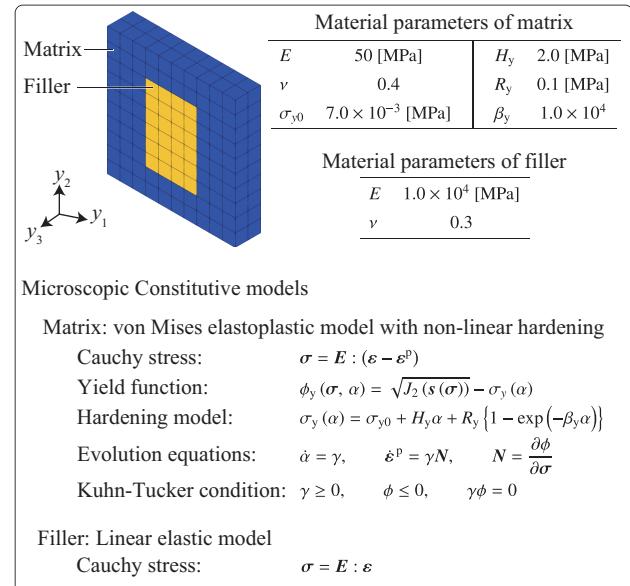


図-3 ユニットセル

本研究では、構成式(9)を代理する関数 ϕ を放射基底関数 ψ による RBF 補間 [1] を用いて次式で定義する。

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \phi(f) = \sum_i^{n_d} \omega_{(i)} \psi(r_{(i)}(f)), \quad (10)$$

$$r_{(i)}(f) = \|f - f_{(i)}\|, \quad (11)$$

$$f = \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{n+1} \\ \tilde{\epsilon}_{n+1}^{\text{acc}} \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

ここに f は説明変数ベクトルであり、 $f_{(i)}$ は RBF 補間に使用する n_d 個の教師データにおける i 番目のデータ点における f を表している。また、 $\tilde{\epsilon}_{n+1}^{\text{acc}}$ は弾塑性材料の履歴依存性挙動を再現するために本研究で導入するマクロ累積ひずみであり、その第 k 成分 $\tilde{\epsilon}_{k,n+1}^{\text{acc}}$ は次式で表される。

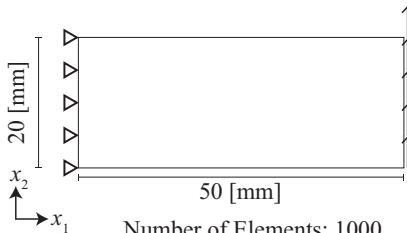
$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{k,n+1}^{\text{acc}} &= \tilde{\epsilon}_{k,n}^{\text{acc}} + \Delta \tilde{\epsilon}_k \left\{ H(\tilde{\epsilon}_{k,n+1} - \tilde{\epsilon}_{j,n}^{\text{max}}) + H(\tilde{\epsilon}_{k,n}^{\text{min}} - \tilde{\epsilon}_{j,n+1}) \right\}, \\ \tilde{\epsilon}_j^{\text{max}} &= \max_{\forall s \in [0,t]} \{ \tilde{\epsilon}_j(s) \mid s \in [0,t] \}, \\ \tilde{\epsilon}_j^{\text{min}} &= \min_{\forall s \in [0,t]} \{ \tilde{\epsilon}_j(s) \mid s \in [0,t] \}. \end{aligned} \quad (13)$$

さらに、 $\omega_{(i)} \in \mathbb{R}^6$ は重み係数ベクトルである。

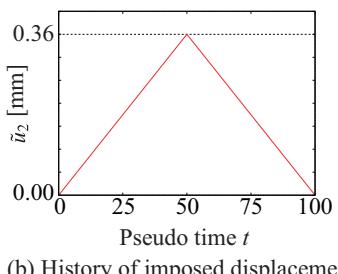
(2) 教師データ作成とパラメータ最適化

式(10)の重み係数 $\omega_{(i)}$ を決定するために、ユニットセルに対して数値材料試験(Numerical Material Test; NMT)を実施することで、次式のマクロ応力-ひずみ応答履歴データ X を得る。

$$X = \begin{Bmatrix} \cdots & \tilde{\epsilon}_{n-1}, & \tilde{\epsilon}_n, & \tilde{\epsilon}_{n+1}, & \cdots \\ \cdots & \tilde{\sigma}_{n-1}, & \tilde{\sigma}_n, & \tilde{\sigma}_{n+1}, & \cdots \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times (n_d)} \quad (14)$$



(a) Targetted structure



(b) History of imposed displacement

図-4 マクロ問題の設定

このデータ X より、教師データとなる説明変数行列 F と応答行列 P を以下のように作成する。

$$F = \{f_{(1)} \cdots f_{(n_d)}\}^T \in \mathbb{R}^{n_d \times 12}, \quad (15)$$

$$P = \{\phi_{(1)} \cdots \phi_{(n_d)}\}^T \in \mathbb{R}^{n_d \times 6}, \quad (16)$$

$$\phi_{(i)} = \tilde{\sigma}_{(i)} \in \mathbb{R}^6. \quad (17)$$

これらの教師データ F, P を用いることで、重み係数 $\omega_{(i)}$ を以下のように求めることができる。

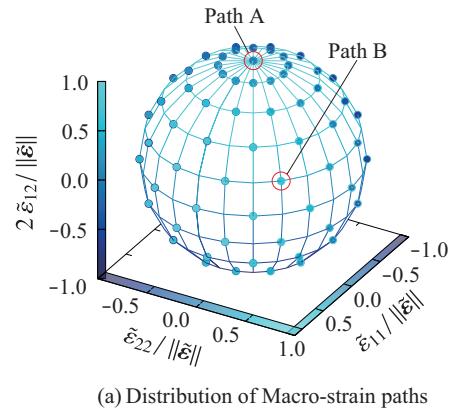
$$\{\omega_{(1)} \cdots \omega_{(n_d)}\}^T = (\Psi + \eta I)^{-1} P, \quad (18)$$

$$\Psi_{ij} = \psi(r_{(i)}(f_{(j)})), \quad \text{where } i, j = 1, \dots, n_d \quad (19)$$

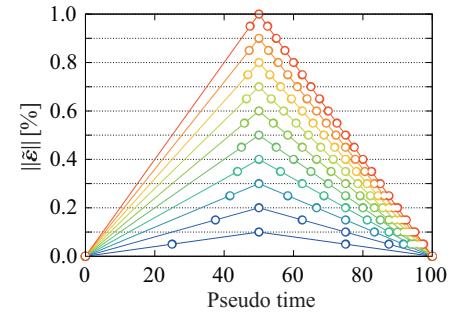
ここで、式(10)および(19)の放射基底関数 ψ には様々な関数形が存在し、教師データに応じて最適な関数形を選択する必要がある。そこで本研究では、 ψ がパラメータ $n_\psi \in \mathbb{N}$ の値によって場合分けされる以下の関数であると定義する。

$$\psi(r_{(i)}(f)) = \begin{cases} n_\psi = 1 : & \left\{ 1 + \left(\frac{r_{(i)}(f)}{\beta} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ n_\psi = 2 : & 1 + \frac{r_{(i)}(f)}{\beta} \\ n_\psi = 3 : & \left\{ 1 + \left(\frac{r_{(i)}(f)}{\beta} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\ n_\psi = 4 : & \left\{ 1 - \frac{r_{(i)}(f)}{\beta} \right\} \\ n_\psi = 5 : & \exp \left\{ - \left(\frac{r_{(i)}(f)}{\beta} \right)^2 \right\} \end{cases} \quad (20)$$

式(18)の η と式(20)の β はハイパーパラメータであり、 n_ψ と同様に教師データに応じて最適な値を用いる必要がある。これらを理論的に決定することは不可能である。



(a) Distribution of Macro-strain paths



(b) Histories of Macro-strain magnitude

表-1 最適化によって得られたハイパーパラメータ

n_ψ	β	η
3	1.150×10^{-2}	1.372×10^{-3}

るため、本研究では図-2 に示す差分進化 [5] と交差検証 [4] を組み合わせたアルゴリズムによって、次式で定義する損失関数 \bar{e} を最小化するようにハイパーパラメータ (n_ψ, β, η) を最適化する。

$$e_i = \sqrt{\sum_{k=1}^6 \sum_{i_t=1}^{n_t} \frac{(\phi_k(f_{(i_t)}) - \phi_{(i),k})^2}{n_t}} \quad (i = 1, \dots, n_{cv})$$

$$\bar{e} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{cv}} e_i^2} \quad (21)$$

なお、 $n_{cv} \in \mathbb{N}$ は CV におけるデータ分割数、 $n_t \in \mathbb{N}$ は教師データを分割して作成した検証用データの数である。

4. 数値計算例

図-3 のユニットセルに対して実際に NMT を実施して代理モデルを作成し、図-4 に示すマクロ問題の解析を実施することで代理モデルの性能について議論する。また、マクロ解析によって得られたマクロひずみ履歴を用いて局所化解析を実施することでミクロ応力分布についても算出可能であることを例証する。なお、この計算例では計算コスト削減のためマクロ問題を平面ひずみ条件の二次元問題とする。

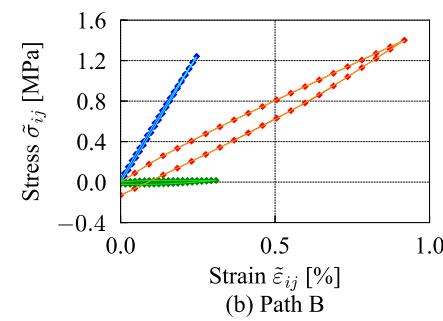
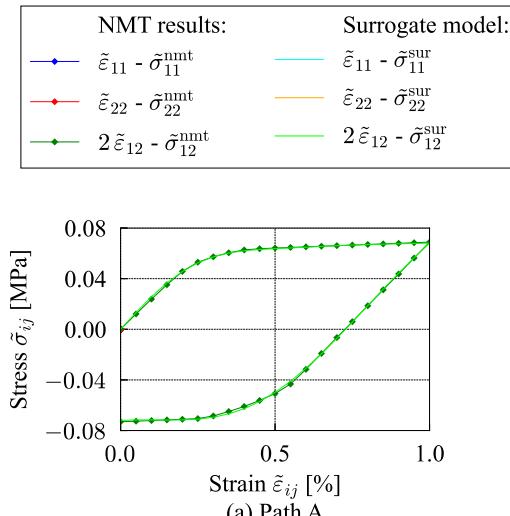


図-6 代理モデルの応答と NMT 結果の比較

(1) NMT による教師データ作成とパラメータ最適化

ユニットセルに対してマクロひずみを負荷し、その後マクロひずみが 0 となるよう除荷する NMT を実施する。その際、負荷するマクロひずみの成分比率 $\left(\frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\|\tilde{\epsilon}\|}, \frac{\tilde{\epsilon}_{22}}{\|\tilde{\epsilon}\|}, \frac{2\tilde{\epsilon}_{12}}{\|\tilde{\epsilon}\|}\right)$ を 110 パターン設定し、各成分比率毎に負荷するマクロひずみのノルム $\|\tilde{\epsilon}\|$ の最大値を変化させ、10 種類の負荷履歴を設定することで、合計 1,110 ケースの NMT を実施する。図-5 (a) のグラフに示す点は実際に使用したマクロひずみ成分比率 $\left(\frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\|\tilde{\epsilon}\|}, \frac{\tilde{\epsilon}_{22}}{\|\tilde{\epsilon}\|}, \frac{2\tilde{\epsilon}_{12}}{\|\tilde{\epsilon}\|}\right)$ を $\tilde{\epsilon}_{11} - \tilde{\epsilon}_{22} - 2\tilde{\epsilon}_{12}$ 空間で示しており、図-5 (b) はこれらの各点で考慮するマクロひずみのノルム $\|\tilde{\epsilon}\|$ の負荷履歴を示している。また、図-5 (b) 上のマーカーは教師データに含めるデータの位置を示している。データ点は各マクロひずみ成分比率 $\left(\frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\|\tilde{\epsilon}\|}, \frac{\tilde{\epsilon}_{22}}{\|\tilde{\epsilon}\|}, \frac{2\tilde{\epsilon}_{12}}{\|\tilde{\epsilon}\|}\right)$ ごとに 131 個あり、従って式(15), (16) に示される教師データの総数は $n_d = 110 \times 131 = 14,410$ となる。

表-1 は以上の条件で実施した数値材料試験から得られた教師データを用いて最適化したハイパーパラメータを示している。ここで、交差検証のためのデータ分割数は $n_{cv} = 10$ とした。

(2) 代理モデルの精度検証

図-6 のグラフは、図-5 (a) において Path A, B として示す成分比率でノルムが 1% となるまでマクロひずみが

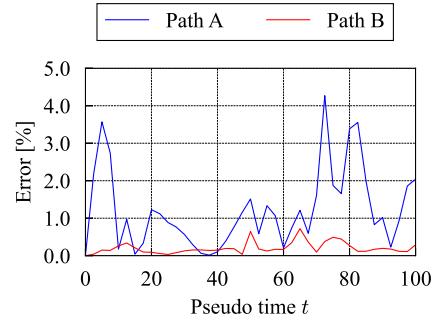


図-7 代理モデルの応答と NMT 結果の誤差

Case name	Material model(s)	Analysis mesh
Surr	Surrogate model	 Elem. A Elem. B Number of Elements: 1000
DA-40		 Number of Elements: 4000 Number of unit cells: 40
DA-250	Constitutive models in Figure 4 (b)	 Number of Elements: 25000 Number of unit cells: 250
DA-1000		 Domain A Domain B Number of Elements: 100000 Number of unit cells: 1000

図-8 解析条件

増加し、その後 0% となるまで減少する履歴を段階的に代理モデルに入力して得られたマクロ応力-ひずみ曲線と、対応する NMT の結果を示している。グラフより、Path A, B で共に代理モデルの応力-ひずみ関係が NMT 結果と概ね一致していることを確認できる。また、図-7 は次式で定義した誤差率を Path A, B それぞれについて時刻歴で示している。

$$\text{Error} = \frac{\|\tilde{\sigma}^{\text{sur}} - \tilde{\sigma}^{\text{nmt}}\|}{\|\tilde{\sigma}^{\text{nmt}}\|} \quad (22)$$

履歴全体にわたって誤差率が 5% を下回っており、作成した代理モデルは NMT 結果と同等のマクロ応力-ひずみ関係を算出可能であると言える。

(3) 有限要素解析への適用

作成した代理モデルを用いて図-4 (a) に示す片持ち梁の曲げ問題の有限要素解析を行う。境界条件として、固定端側の節点変位を拘束し、自由端側には図-4 (b)

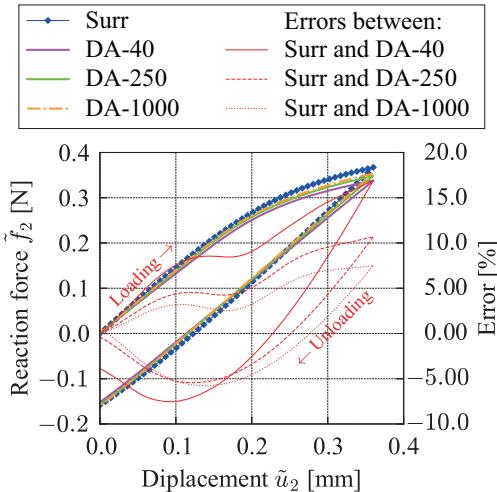


図-9 荷重変位関係の比較

に示す履歴で強制変位を与える。図-8は実施する解析ケースとそれぞれで使用する解析メッシュを示している。ケース Surr では代理モデルを用いて解析を行い、ケース DA-40, 250, 1000 では提案手法の精度を検証するための直接解を実施する。ここで、直接解析とはマクロ構造のメッシュに直接ミクロ構造を反映することで非均質材料の解析を実施する手法である。

図-9は各ケースで得られた、梁の自由端側における垂直方向の荷重変位関係と、ケース Surr の解と他のケースの解との誤差を示している。ここで、誤差は次のように定義した。

$$\text{Error} = \frac{\tilde{f}_{2,(i_s)}^{\text{Surr}} - \tilde{f}_{2,(i_s)}^{\text{DA}}}{\sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{i_s=1}^{n_s} (\tilde{f}_{2,(i_s)}^{\text{DA}})^2}} \quad (23)$$

ここに、 n_s は解析ステップ数であり、 $\tilde{f}_{2,(i_s)}^{\text{Surr}}$ 、 $\tilde{f}_{2,(i_s)}^{\text{DA}}$ はそれぞれケース Surr と直接解析で得られた第 i_s ステップにおける梁の自由端の反力の垂直方向成分である。図 10(b)より、ケース Surr の結果は直接解析の結果と類似の傾向を示している。一方、誤差率は全てのケースに対して 5%以上、DA-40 に対しては 15%以上に達しているが、このような誤差の原因は代理モデルの精度ではなく、数学的均質化理論と直接解析におけるユニットセルの取り扱いの違いであると考えられる。

提案手法の代理モデルはマクロ材料構成モデルを代替しているため、ケース Surr の解析では数学的均質化理論に基づいてユニットセルの寸法は無限小であると仮定されている。一方で、直接解析におけるユニットセルの寸法は有限の大きさである。そのため、均質化理論に基づくマルチスケール解析と等価な結果を直接解析によって得るためにには、ユニットセルの寸法をマクロ構造の大きさに対して十分に小さくする必要がある。実際図-9から、この計算例における直接解析の解がユニットセルのサイズが小さくなるにつれ、ケース Surr の結果に漸近する傾向にあることが確認できる。以上の結果から、提案する代理モデルが分離型マルチスケール解析におけるマクロ材料構成則を代替可能であると考えられる。

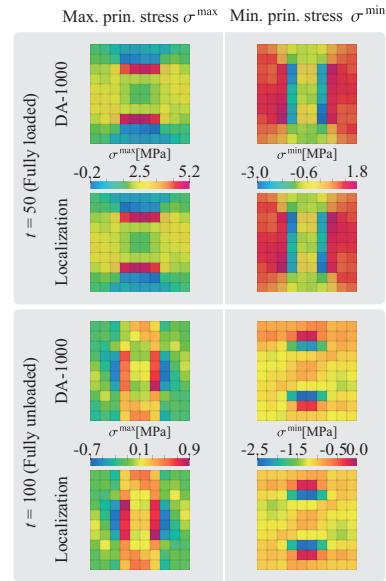


図-10 Domain A における最大／最小主応力分布の比較

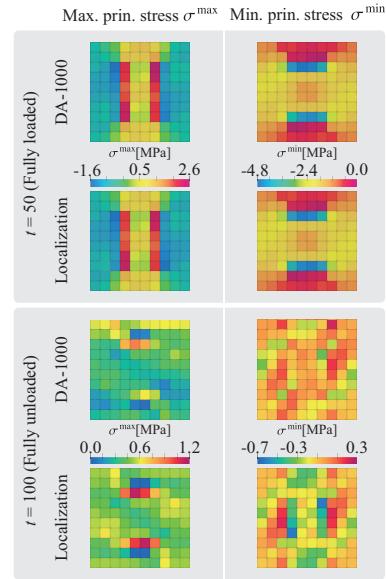


図-11 Domain B における最大／最小主応力分布の比較

(4) 局所化解析

最後に、図-8に示すElem. A, Bにおいてケース Surr で算出されたマクロひずみ履歴をユニットセルに与えてミクロ応力を計算する局所化解析を実施した。図-10, 11は局所化解析を行なうことで得られた最大／最小主応力分布と、ケース DA-1000において得られた Domain A, B 内の主応力分布を示している。ここで、図に示す応力分布は $t = 50[\text{s}]$ (強制変位最大時) と、 $t = 100[\text{s}]$ (除荷終了時) の値である。図より、各時刻において局所化解析によってと直接解析と類似の応力分布が得られたことを確認できる。表-2は各領域、各時刻における最大主応力の最大値と最小主応力の最小値の相対誤差を示している。 $t = 50[\text{s}]$ における誤差は最大で 5%程度であり、提案手法が直接解析と同等の結果を算出しているといえる。また、Element A については $t = 100[\text{s}]$ にお

表-2 局所化解析で得られた主応力の相対誤差

最大主応力 σ^{\max} の最大値		
Pseudo time	Compared region	Relative error [%]
50 (fully loaded)	Element A and domain A	1.97
	Element B and domain B	5.35
100 (fully unloaded)	Element A and domain A	5.27
	Element B and domain B	29.02
97 ($\tilde{\varepsilon}_{12} \approx 0$)	Element B and domain B	7.39
	最小主応力 σ^{\min} の最小値	
Pseudo time	Compared region	Relative error [%]
50 (fully loaded)	Element A and domain A	4.78
	Element B and domain B	1.30
100 (fully unloaded)	Element A and domain A	1.73
	Element B and domain B	85.42
97 ($\tilde{\varepsilon}_{12} \approx 0$)	Element B and domain B	8.02

いても $t = 50[\text{s}]$ と同程度の誤差である。一方、Element B では $t = 100[\text{s}]$ で局所化解析と直接解析の誤差が最大主応力に関して 29%，最小主応力に関して 85% となっている。このような誤差が生じた原因は、 $t = 100[\text{s}]$ における Element B の変形状態が教師データ空間の外部に存在するためだと考えられる。

図-12 はケース Surr で得られた Element B 内のマクロ応力-ひずみ関係を示している。除荷中に $2\tilde{\varepsilon}_{12}$ の値が正から負へと転じているが、図-5 から明らかにこのような履歴は教師データに含まれていない。すなわち、 $t = 100[\text{s}]$ における Element B の変形状態は教師データの空間外に存在するため、教師データの外挿による RBF 補間が行われたことで計算精度が低下したと考えられる。実際、除荷中に $\tilde{\varepsilon}_{12}$ がおよそ 0 となる $t = 97[\text{s}]$ では変形状態は教師データの空間内に存在し、このときの主応力の誤差は最大値と最小値の両方について 10% 未満である。以上の結果から、対象とする変形状態が教師データ空間の範囲内に含まれていることが、提案する代理モデルを適用可能な条件であることが確認された。

5. 結論

本研究では、均質化弾塑性構成則の代理モデルを RBF 補間を用いて作成する方法を提案した。提案手法の特徴は以下の 2 点である。1 点目はマクロ累積ひずみと呼ばれる新たな履歴変数を RBF 補間に導入することで弾塑性材料の履歴依存性挙動を精度良く表現可能な補間関数を提案した点であり、2 点目は放射基底関数の関数形をハイパーパラメータとして考慮し、最適化によって決定した点である。まず、ユニットセルに対してさまざまな変形履歴を与える数値材料試験を実施することでマクロ応力-ひずみ関係とその履歴に関するデータベースを作成した。このデータベースから作成した教師データを RBF 補間することで、マクロひずみとマクロ累積ひずみを入力としてマクロ応力を算出する均質化弾塑性構成則の代理モデルを作成した。その際、代理モデルの応答が適切な値となるように 3 つのハイパーパラメータを交差検証と差分進化を用いて最適化した。数値計算例においては、作成した代理モデルを用いてマクロ解析と局所化を実施し、得られた結果を直接解

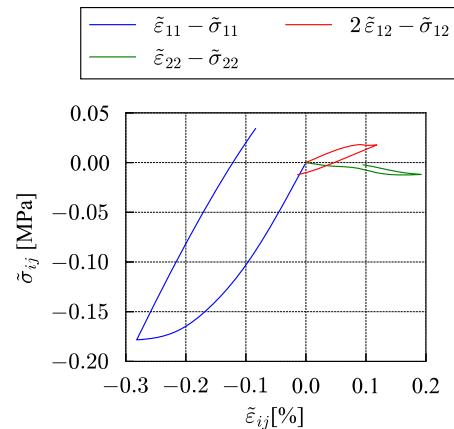


図-12 Element B のマクロ応力-ひずみ履歴

析の結果と比較することで提案手法の性能について検証した。その結果、マクロ解析において発生する変形状態が、教師データ空間の範囲内に収まる場合、提案手法が直接解析と同等の結果を得られることが確かめられた。一方で、教師データ空間の範囲外となる変形状態に対しては、提案手法の結果は直接解析の結果と乖離することが確認された。そのため、マクロ解析で発生する全ての変形状態を教師データ空間内に含む代理モデルを作成することで、このような誤差は抑制されると考えられる。以上の内容は現在、原著論文として学術誌に投稿中である [6]。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 22J13235, 22K14142 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] M. Buhmann. Multivariate cardinal interpolation with radial-basis functions. *Constructive Approximation*, 6(3):225–255, 1990.
- [2] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(2):79–95, 1967. Cited By :668.
- [3] J.-L. Lions. *Some Methods in Mathematical Analysis of Systems and their Control*. Kexue Chubanshe Science Press and Gordon & Breach Science Pub, Beijing, 1981.
- [4] M. Stone. Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 36(2):111–147, 1974.
- [5] Rainer Storn and Kenneth Price. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *J. Glob. Optim.*, 11(4):341–359, 1997.
- [6] Y. Yamanaka, S. Matsubara, N. Hirayama, S. Moriguchi, and K. Terada. Surrogate modeling for the homogenization of elastoplastic composites based on rbf interpolation. *Preprint*.