

非 Darcy 流れにおける透水性低下特性 に関する数値解析的検討

A Numerical Study on the Characterization of
Permeability Reduction in Non-Darcy Flows

一藤 亮太¹⁾, 橘 一光²⁾, 野村 恵佳³⁾, 高瀬 慎介⁴⁾, 森口 周二⁵⁾, 寺田 賢二郎⁶⁾
Ryota Itto, Ikkoh Tachibana, Reika Nomura, Shinsuke Takase, Shuji Moriguchi and Kenjiro Terada

- ¹⁾修(工)東北大学大学院工学研究科(〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: itto.ryota.r6@alumni.tohoku.ac.jp)
²⁾修(工)東北大学大学院工学研究科(〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: ikkoh.tachibana.q3@dc.tohoku.ac.jp)
³⁾博(工)東北大学災害科学国際研究所助教(〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: nomura@irides.tohoku.ac.jp)
⁴⁾博(工)八戸工業大学大学院工学研究科准教授(〒031-8501 青森県八戸市妙字大開88-1, E-mail: takase@hi-tech.ac.jp)
⁵⁾博(工)東北大学災害科学国際研究所准教授(〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: s_mori@irides.tohoku.ac.jp)
⁶⁾Ph.D 東北大学災害科学国際研究所教授(〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1, E-mail: tei@irides.tohoku.ac.jp)

The understanding of the permeability properties of porous media is a key research topic in many fields and has been the subject of many studies over the decades. In this study, a series of three-dimensional fluid simulations at the pore level are performed using the SUPG/PSPG stabilized finite element method to investigate the seepage behavior during the transition from the Darcy flow to the non-Darcy flow region in porous media. Based on the simulated results, the flow characteristics are explored to propose a simple and reasonable modeling with a concept of Equivalent Permeability Coefficient Ratio(EPC-Ratio). As a result, it was found that the void ratio has relatively low contribution on the EPC-Ratio, and the proposed modeling can accurately estimate the EPC in the non-Darcy flow region.

Key Words : Non-Darcy flow, Forchheimer-equation, Pore-level Simulation, Permeable Porous Media

1. 緒言

(1) 研究の背景

近年、豪雨による災害が頻発・激甚化している。豪雨災害の中では、土砂災害、堤防破堤、地盤材料の洗掘や流出などの現象が発生し、被害拡大の要因となっている。これらのリスクを予測・評価するためには、多孔質体と間隙流体の相互作用力のモデルの精度向上が不可欠である。そのような現象の一例として、土粒子群の間隙における透水挙動については、古くから実験・数値解析的な検討が行われてきた[1,2,3,4]。

特に、地盤工学における透水問題に関しては、式(1)の Darcy 則が最も基礎的なモデルである。

$$J = \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| = \frac{1}{k_0} v_f \quad (1)$$

ここで、 J は動水勾配 [-], k_0 は Darcy 領域における透水係数 [m/s], v_f は透水方向の流速 [m/s], h は全水頭 [m], x は位置 [m] である。

多孔質媒体中における非 Darcy 流れについては、1900 年頃から実験・理論的な考究が行われており、Forchheimer(1901) は水で飽和した多孔質体中の動水勾配と流速の関係を以下の関数で表現した。

$$J = av_f + bv_f^2 \approx \frac{1}{k_0} v_f + bv_f^2 \quad (2)$$

ここで、 a, b はそれぞれ [s/m], [s²/m²] の次元を持つ係数である。式(2) (以下、Forchheimer 式と表記) は、流

速が十分に小さいとき慣性力(右辺第 2 項)を無視することができ、Darcy 則と一致することが知られている[5]。また、Forchheimer 式の係数 a, b に関しては、実験・理論的な側面から種々の推定式[6]が提案されており、代表的なものを以下に示す。

$$a = \frac{150\nu(1-\varphi)^2}{g\varphi^3 D^2}, \quad b = \frac{1.75(1-\varphi)}{g\varphi^3 D} \quad \dots \text{Ergun (1952)}$$

$$a = \frac{255\nu(1-\varphi)}{g\varphi^{3.7} D^2}, \quad b = \frac{2(1-\varphi)}{g\varphi^3 D} \quad \dots \text{Kadlec et al. (1996)}$$

$$a = \frac{180\nu(1-\varphi)}{g\varphi^3 D^2}, \quad b = \frac{0.6(1-\varphi)}{g\varphi^3 D} \quad \dots \text{Irmay (1964)}$$

ここで、 ν は動粘性係数 [m²/s], φ は間隙率 [-], D は粒子の代表粒径 [m], g は重力加速度 [m/s²] である。

既存の提案式が抱えている課題として、いずれの推定式も式の形は類似しているものの係数やパラメータの値が異なること、粒径が代表粒径として 1 種類の粒径に集約されていることが挙げられる。一方で、実際の地盤材料は粒度分布を有していることから、代表粒径が物理的にどのような意味を持つのか、またパラメータの値の差異や各提案式の適用範囲についても更なる探求が必要である。

(2) 研究の目的

本研究では非 Darcy 流れを対象とした数値実験に基づき、地盤材料などの多孔質媒体の透水特性を合理的かつ簡便に推定可能な式の提案を目的とする。具体的には、SUPG/PSPG 安定化有限要素法を用いて間隙レベルにおける 3 次元浸透流シミュレーションを実施し、Darcy 領域から非 Darcy 流れへの遷移過程で生じる透水性の低下を等価透水係数比 F の導入によってモデル化することを試みる。

2. 数値実験による透水特性評価

本研究では、ある間隙率 φ の粒子群が充填された領域を代表するような六面体領域を数値実験の試験領域 Ω_f として設定する。

(1) 支配方程式と離散化手法

3 次元浸透流シミュレーションの支配方程式として、式(3)の Navier-Stokes 方程式を採用する。

$$\left. \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{array} \right\} \text{in } \Omega_f \quad (3)$$

ここで、 ρ は流体の質量密度 [kg/m^3]、 \mathbf{u} は流速ベクトル、 \mathbf{f} は外力項を表している。また、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は次のように書き表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (4)$$

ここで、 μ は粘性係数 [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]、 p は圧力 [Pa]、 \mathbf{I} は 2 階の恒等テンソルである。式(3)に対して、SUPG/PSPG 安定化有限要素法 [7,8] による空間離散化を適用することにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega_f} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega + \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left\{ \tau_{\text{SUPG}} \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h + \tau_{\text{PSPG}} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\ & \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) \right\} d\Omega \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{u}^h 、 p^h はそれぞれ流速と圧力の有限要素近似式、 \mathbf{w}^h 、 q^h は、それぞれ運動方程式と連続の式に対する重み関数の近似式である。式(5)の第 4 項は移流の卓越に対して安定化を施す SUPG 項、および圧力振動を回避するための PSPG 項である。式(5)に対して、P1/P1 (流速・圧力 1 次) の四面体要素を用いて空間方向への離散化を行い、時間方向の離散化には無条件安定となる Crank-Nicolson 法を適用する。

(2) 試験領域及び入力条件の設定

試験領域 Ω_f に対して粒子群が自由落下・接触・静止する解析を行うことで、粒子のランダムかつ偏在のない配置を決定する。なお、粒子の充填には個別要素法

[9] を用いた。このとき、図 1 に示すように、壁面と隣接する粒子について向かい合う壁面に隣接する粒子群との接触判定を行うことにより、粒子位置についての幾何学的周期性が満足されるようとする。粒子の表面において滑りなし条件、壁面における流速に対して周期境界条件を設定することで数値実験を実施する。

次に、間隙流体の駆動力について述べる。間隙流体は重力の作用により位置水頭・圧力水頭を得て水頭差により透水しているものとする。流動が大域的に見て定常状態とみなせるとき、間隙流体に作用する外力 \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = -g\mathbf{J} \quad (5)$$

と表すことができる。ここで、 g は重力加速度、 \mathbf{J} は動水勾配ベクトルである。本研究における透水問題設定では位置水頭が解析領域内で変化しないため、任意の流下方向を考えるとき、区間 Δz に生じる動水勾配の大きさ $J = |\mathbf{J}|$ は着目区間での圧力変化量の絶対値 $|\Delta p|$ から

$$J = \frac{1}{\rho g} \frac{|\Delta p|}{\Delta z} = \frac{1}{\rho g} \bar{P}_z \quad (6)$$

のように求められる。一連の数値実験では解析領域の z 軸正方向を流下方向として設定し、上式に表れる流下方向の平均的な圧力勾配の大きさ \bar{P}_z を所与の条件とした解析を行う。

(3) 透水性評価方法

a) 透水流れの評価指標

本研究では、流れが定常に達した状態での流出面における平均流速を透水流速として、次式により算定する。

$$v_f = \frac{1}{|\partial \Omega_f^y|} \int_{\partial \Omega_f^y} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3 d\Omega \quad (7)$$

ここで、 $\partial \Omega_f^y$ は試験領域 Ω_f において流下方向の単位ベクトル \mathbf{e}_3 に直交する任意の流出面を表し、 $|\bullet|$ は \bullet の面積を表す。この透水流速 v_f を代表流速とし、Chilton ら [10] が提案した粒子レイノルズ数 Re を評価している。

$$Re = \frac{|v_f|D}{\nu} \quad (8)$$

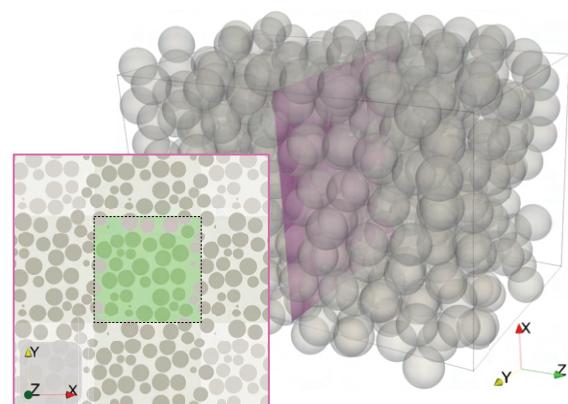


図-1 側方四面周期境界条件での粒子パッキング

また、数値実験結果から算定される透水流速 v_f 及び入力条件である動水勾配 J を用いて得られる次の見かけの透水係数 k' を数値実験による透水性評価の指標とする。

$$k' = \frac{|v_f|}{J} \quad (9)$$

b) 等価透水係数比による透水性低下傾向の評価

数値実験から評価される見かけの透水係数 k' を Darcy 領域での透水係数 k_0 で除すことにより、等価透水係数比 \mathcal{F} を次のように定義する。

$$\mathcal{F} = \frac{k'}{k_0} \quad (10)$$

この指標は、Darcy 流れに対する非 Darcy 流れの透水性の低下度合いを表している。具体的には、Darcy 領域では $\mathcal{F} = 1$ 、流速の増加などに伴い流れが複雑化し透水性が低下すると値が 1 より小さくなる ($\mathcal{F} < 1$) という 2 つの特性を持つ。等価透水係数比 \mathcal{F} をレイノルズ数などの代表的なパラメータの関数としてモデル化することができれば、非 Darcy 流れ条件での数値実験や土質試験を実施せずとも、透水性低下傾向を簡便に推定することが出来る。

3. 数値実験結果

本稿では、間隙率を 3 パターン変化させた解析結果を示す。粒子群の粒径を $D=1.0\text{mm}$ とし、直径あたりのメッシュ分割数は 30 とした。また、間隙流体の物性値として、室温条件における水と同様の質量密度 $\rho = 1,000 \text{ [kg/m}^3]$ 、粘性係数 $\mu = 1.0 \times 10^{-3} \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$ を用いた。

(1) 既存経験則式との比較による妥当性検証

間隙流体の駆動力となる動水勾配を $J=0.01$ に設定することで Darcy 流れの解析を行い、水理実験値との整合性が高い次の Kozeny-Carman 式 [11] を参考値として比較することで、数値実験の妥当性を検証する。

$$k_0 = \frac{1}{150} \frac{\rho g}{\mu} \frac{D^2 \varphi^3}{(1-\varphi)^2} \quad (11)$$

各間隙率 φ における結果をまとめた表 1 より、式 (9) より評価される見かけの透水係数 k' (この場合は Darcy 域の透水係数) と Kozeny-Carman 式から推定される透水係数 k_0 がほぼ一致していることが分かる。

これは、Forchheimer 式における慣性力項の影響が無視できるほど小さく、Darcy 流れ条件を合理的に再現していることを示している。加えて、数値実験による透水性評価の有効性も併せて示された。

(2) 非 Darcy 流れにおける透水特性の分析

動水勾配を $J=1.0, 5.0, 10.0$ に設定し、非 Darcy 流れにおける透水性の評価を行った。流速分布及び流線の可視化結果を図 2 に示す。流速分布から局所的に流速が卓越する様子が、流線から試験領域内部で粒子群の影響により流れが乱れている様子が観察できる。また、解析領域の x 方向の中心を通り、流入出面に直交する平面(以下、水平断面と表記)における渦度のノルム $\zeta (=|\nabla \times \mathbf{u}|)$ を図 3 に可視化した。図 3 から、間隙構造の内部におけるミクロなエネルギー損失(流動性の低下)が確認でき、結果として透水性が低下すると考えられる。

表-1 数値実験結果と既存経験則式との比較

間隙率	数値実験結果	Kozeny-Carman 式
φ [-]	k' [mm/s]	k_0 [mm/s]
0.438	19.592	19.293
0.419	15.249	15.723
0.391	11.837	11.648

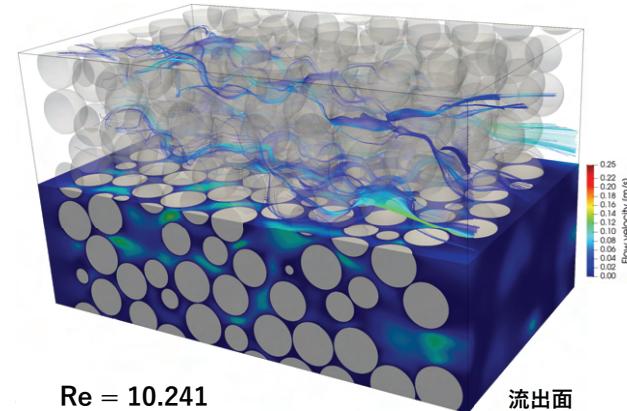


図-2 流速分布・流線の可視化 (間隙率 $\varphi=0.391$)

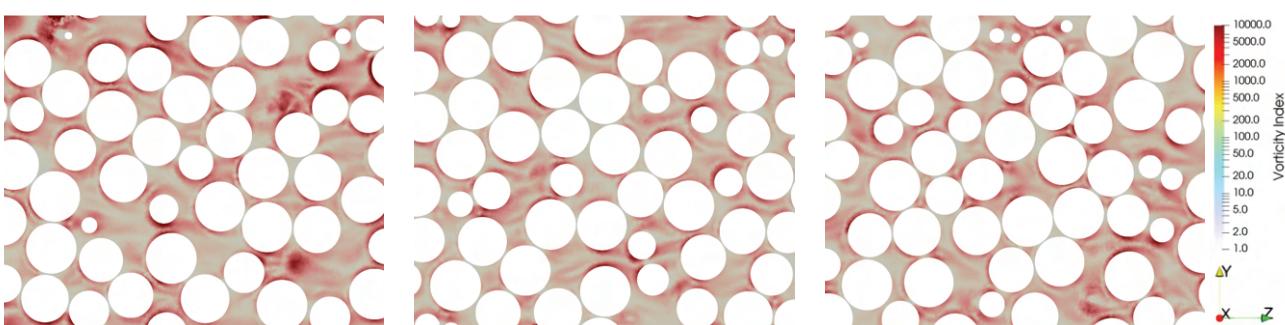


図-3 水平断面における渦度 ζ の分布 (左: 間隙率 $\varphi = 0.438$, 中央: $\varphi = 0.419$, 右: $\varphi = 0.391$)

図4に入力条件である動水勾配 J と式(7)から評価した透水流速 v_f の関係をまとめた。動水勾配の増加に伴って、数値実験結果が点線でプロットした動水勾配と流速の線形関係(Darcy則)から逸脱していくことが見て取れる。これは、間隙内部におけるミクロな流れの乱れにより透水性が低下していることが原因だと考えられる。次に、図5に式(7)～式(9)により評価したレイノルズ数と見かけの透水係数の関係をまとめた。この図から、各間隙率 φ においてレイノルズ数が1付近で透水性が低下し、流速に対する透水係数の線形性(Darcy則)から逸脱していることが分かる。この結果は既往報告[12,13]と一致している。また、図6にまとめたレイノルズ数と等価透水係数比の関係から、透水性低下傾向は間隙率の多寡に依存せず非常に類似していることが分かる。このことから透水性低下の傾向に対して間隙率の影響は極めて限定的であるといえる。

(3) 等価透水係数比の関数化

式(2)に示したForchheimerの式は、流れの方向を考慮して一般化すると、透水係数や多孔質媒体の特徴量を含む部分と透水流速 v_f に乘算分解することが出来る。

$$J = \left(\frac{1}{k_0} + b|v_f| \right) v_f \quad (12)$$

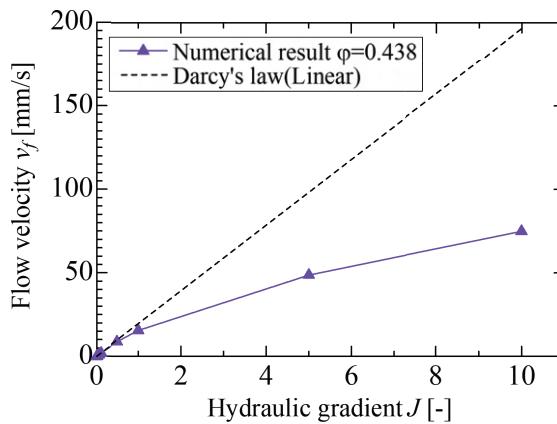


図4 動水勾配と透水流速の関係

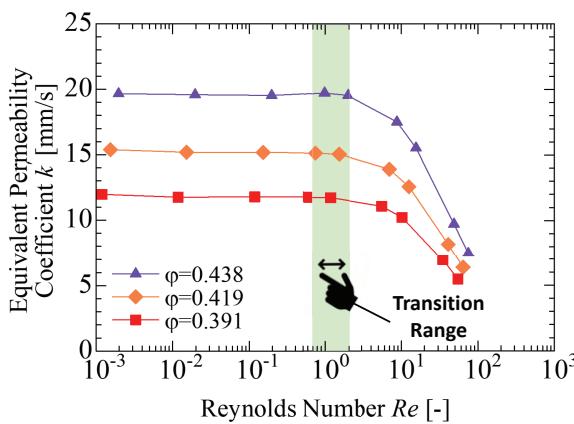


図5 レイノルズ数と透水係数の関係

山上ら(1975)[14]の試みに倣い、前半部分を見かけの透水係数 k' として次のように定めることによって、Darcy則と同様、流速との線形関係として表現することが出来る。

$$k' \approx \left(\frac{1}{k_0} + b|v_f| \right)^{-1} \quad (13)$$

式(10)に対して、粒子レイノルズ数 Re 式(8)、見かけの透水係数 k' 式(13)と Forchheimer式の係数 b の一般的な関数形を代入して整理することにより、次式のような等価透水係数比 F の関数形が得られる。

$$F = \frac{1}{1 + k_0 \frac{v}{gD^2} \frac{\alpha(1-\varphi)}{\varphi^3} Re} \quad (14)$$

ここで、係数 b については、次式のように提案式毎に異なる係数部分を α として統一的に表記している。

$$b = \frac{\alpha(1-\varphi)}{g\varphi^3 D} \quad (15)$$

式(14)に示す関数のプロットと数値実験結果から算定された等価透水係数比を図7に示す。ここで、パラメータ α として、暫定的に Ergun(1952)[15]の提案する $\alpha = 1.75$ を用いている。

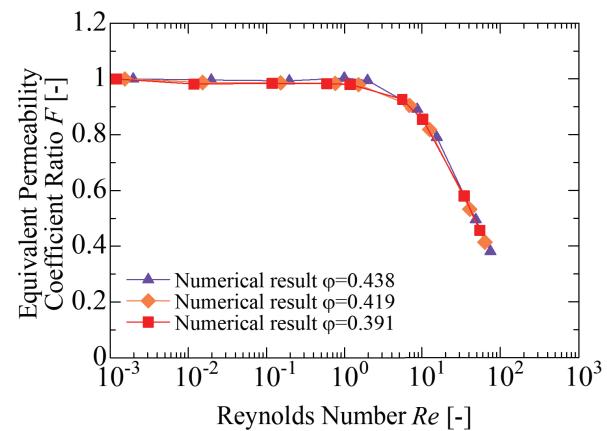


図6 レイノルズ数と等価透水係数比の関係

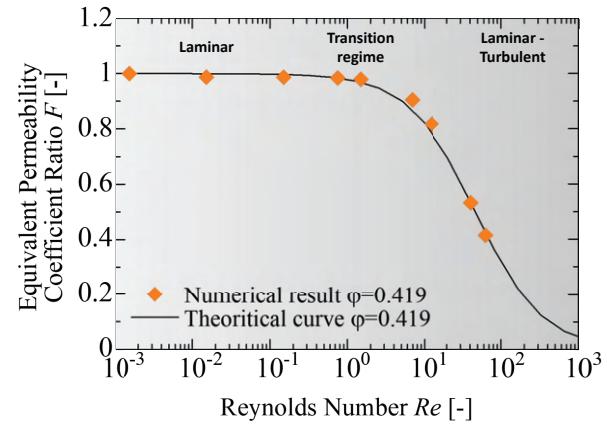


図7 式(14)による等価透水係数比 F の推定

提案した等価透水係数比の関数 \mathcal{F} により、任意の間隙率、代表粒径における多孔質媒体の透水性低下傾向をレイノルズ数の関数として良好にモデル化出来ていることが分かる。赤色のプロットに示す数値実験結果との若干の乖離は、暫定値を用いたパラメータ α を間隙率 φ や代表粒径 D と関連付けて設定することで解消される可能性がある。

4. 結言

本研究では、Darcy 領域から非 Darcy 流れへの遷移過程で生じる透水性低下傾向を分析し、簡便かつ合理的な推定式を提案することを目的として、間隙レベルにおける 3 次元浸透流シミュレーションによる数値実験を実施した。数値実験結果から、以下の知見を得た。

- Darcy 流れの領域においては、既存の透水係数の推定式と概ね合致する数値実験結果が得られた。
- 数値実験から評価した等価透水係数比より間隙率の多寡に伴って透水係数自体は低下するが、透水性低下傾向に対する影響は極めて限定的であることが明らかとなった。
- 等価透水係数比をレイノルズ数の関数としてモデル化することで透水性低下傾向を一定程度推定できる。
- 等価透水係数比 \mathcal{F} による透水性低下傾向の合理的なモデル化のためには、内部構造の乱雑さを表すパラメータの採用や粒径 D の変化をより鋭敏に反映するような定式化が必要である。

上述のように、本研究で提案した等価透水係数比は一定程度の精度で透水性挙動を推定することが可能であるが、同式中に含まれるパラメータ α や粒径 D のより望ましいモデル化に関しては、より多量の数値実験の実施によって明らかにすべき課題として残されている。また、実際の地盤材料（多孔質材料）は内部構造に幅広い粒度分布を持っているため、本研究で扱った単一粒径の解析モデルは実際の材料と比較して簡易的なものである。

今後は、幅広い粒度分布を持つ密な間隙構造のモデルや様々な粒径スケールの解析モデルに対して浸透流シミュレーションを行い、数値実験の立場から非 Darcy 流れにおける透水特性に関する知見を蓄積していく。

参考文献

- [1] Geertsma, J.: Estimating the coefficient of inertial resistance in fluid flow through porous media, *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. 14, No. 05, pp. 445–450, 10 1974.
- [2] Soni, J., Islam, N. and Basak, P.: An experimental evaluation of non-darcian flow in porous media, *Journal of Hydrology*, Vol. 38, No. 3, pp. 231–241, 1978.
- [3] Zeng, Z. and Grigg, R.: A criterion for non-darcy flow in porous media, *Transport in Porous Media*, Vol. 63, pp. 57–69, 04 2006.
- [4] Tachibana, I., Moriguchi, S., Takase, S., Terada, K., Aoki, T., Kamiya, K. and Kodaka, T.: Characterization of transition from darcy to non-darcy flow with 3d pore-level simulations, *Soils and Foundations*, Vol. 57, No. 5, pp. 707–719, 2017.
- [5] 吉岡真弓, 登坂博行: 高透水性多孔質体中の非ダルシー流れに関する考察, 地下水学会誌, Vol. 52, No. 3, pp. 275–284, 2010.
- [6] Sidiropoulou, M. G., Moutsopoulos, K. N. and Tsihrintzis, V. A.: Determination of forchheimer equation coefficients a and b, *Hydrological Processes*, Vol. 21, No. 4, pp. 534–554, 2007.
- [7] Tezduyar, T.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Vol. 28 of *Advances in Applied Mechanics*, pp. 1–44, Elsevier, 1991.
- [8] Tezduyar, T. and Sathe, S.: Stabilization parameters in supg and pspg formulations, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Vol. 4, pp. 71–88, 01 2003.
- [9] Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47–65, 1979.
- [10] Chilton, T. H. and Colburn, A. P.: Pressure drop in packed tubes1, *Industrial & Engineering Chemistry*, Vol. 23, No. 8, pp. 913–919, 1931.
- [11] Bear, J.: *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Vol. 120, Soil Science, 1972.
- [12] Fancher, G. H. and Lewis, J. A.: Flow of simple fluids through porous materials, *Industrial & Engineering Chemistry*, Vol. 25, No. 10, pp. 1139–1147, 1933.
- [13] Li, Z., Wan, J., Xiong, T., Zhan, H., He, L. and Huang, K.: Experimental study of non-darcy flow characteristics in permeable stones, *Hydrology and Earth System Sciences*, Vol. 26, No. 13, pp. 3359–3375, 2022.
- [14] 山上拓男, 小田英一: 有限要素法による非ダルシー浸透流の一解法, 土木学会論文報告集, Vol. 1975, No. 234, pp. 111–120, 1975.
- [15] Ergun, S.: Fluid flow through packed columns, *Chemical Engineering Progress*, Vol. 48, pp. 89–94, 1952.