

# フェーズフィールド法を用いた 不飽和浸透流解析

Unsaturated seepage flow analysis using phase field method.

石黒俊輔<sup>1)</sup>, 山田正太郎<sup>2)</sup>, 京谷孝史<sup>3)</sup>

Shunsuke Ishiguro, Shotaro Yamada and Takashi Kyoya

1) 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail:

shunsuke.ishiguro.q1@dc.tohoku.ac.jp)

2) 東北大学 大学院工学研究科 准教授 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail:

shotaro.yamada.d2@tohoku.ac.jp)

2) 東北大学 大学院工学研究科 教授 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail:

takashi.kyoya.b1@tohoku.ac.jp)

This study is a part of the research aiming to construct a mechanical model that treats unsaturated soil composed of soil particles, air and water as a two-phase mixture composed of a soil skeleton and pore fluid. As a preliminary step, an unsaturated seepage flow analysis is attempted in which pore water and pore air are treated as the same fluid under the condition that the motion of the soil skeleton is neglected. To treat porewater and pore air as the same fluid, we construct a coupled method that solves the equation of motion of incompressible fluid flowing in a porous media with the phase-field method using soil saturation as the interfacial function. In addition, to verify the validity of the proposed method, a comparison is made with a model experiment for unsaturated seepage flow. As a result, it is shown that the shape of the infiltrability is generally consistent between the past experimental results and the calculation results using the proposed method.

**Key Words:** Unsaturated soil, phase-field method, seepage flow analysis, saturation

## 1. はじめに

既存の不飽和土の数値解析では、土骨格、間隙水、間隙空気の三相を同じ物質点を占める連続体として近似する三相混合体理論が適用されることが多い。しかし、飽和領域では間隙空気が存在しない、また、乾燥領域では間隙水が存在しないにも関わらず、間隙水・空気が存在しない領域であってもそれらの流速や圧力を計算する必要があることが、安定的に計算を行うことを阻害する場合がある。そこで、間隙水と間隙空気を間隙流体として同列に捉え、不飽和土を土骨格と間隙流体から成る二相混合体として近似することを考える。飽和領域、乾燥領域であってもこれらの二相は存在するため、不飽和土でも飽和土と同様に安定的な解析が可能となると考えられる。本研究では土骨格と間隙流体の二相連成解析の前段階として、土骨格の運動を無視した不飽和浸透流解析を実施する。ただし、間隙流体の運動は、二相混合体理論に基づいて導出した運動方程式と質量保存則に基づいて解析する。また、水と空気を同列な流体として扱うために、フェーズフィールド法を適用する。加えて、提案手法を用いて不飽和浸透流解析を行い、その妥当性を検証することを目的とする。

## 2. 支配方程式

解くべき未知関数は PF(フェーズフィールド)変数  $\phi$ 、間隙流体の土骨格に対する相対平均流速  $w$ 、間隙流体の

圧力  $p$  の 3 つである。土中の間隙率  $n$  が変化する場合、実流速では連続性がなくなるため、平均流速を用いる。本研究では、土骨格の運動を考慮せず、土骨格の速度は 0 として扱うため、間隙流体の土骨格に対する相対平均流速は間隙流体の平均流速と等しい。PF 変数が  $\phi=0$  の領域を乾燥領域、 $0 < \phi < 1$  の領域を不飽和領域、 $\phi=1$  の領域を飽和領域と定義する。PF 変数は間隙流体に占める水の体積割合を示すため、土中では飽和度と一致する。 $\phi$  の時間発展方程式は以下の式で表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{n} w \cdot \nabla \phi = -M_a \eta \quad (1)$$

$$\eta = \xi(\phi) - k_\phi (\nabla^2 \phi + \kappa |\nabla \phi|) \quad (2)$$

$$\xi(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial \phi}, \quad \varphi(\phi) = \phi^2 (\phi - 1)^2 \quad (3)$$

ここで、 $M_a$  はモビリティ係数、 $\eta$  は化学ポテンシャル、 $\kappa$  は界面の曲率を意味する。式(1)に示す通り、 $\phi$  の時間発展方程式は、遷移領域の勾配を緩やかにすると同時に、遷移領域の幅を一定に保つ働きを持つ化学ポテンシャル項と  $\phi$  が流速によって運ばれる効果を表す移流項によって構成される。

間隙流体と土骨格の二相混合体理論に基づくと、間隙流体の運動方程式と質量保存則は以下のように表すこと

ができる。

運動方程式 :

$$\rho^f \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\rho^f}{n} \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{n} \mathbf{w} \otimes \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{w} = -n \nabla p \\ + \nabla \cdot \left\{ \mu \left[ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] - \frac{\mu}{n} \left( \mathbf{w} \otimes \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} \otimes \mathbf{w} \right) \right\} \quad (4) \\ + n \rho^f \mathbf{g} - \frac{\rho^f g n}{k} \mathbf{w} + n f_{sv}$$

質量保存則 :

$$n \frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^f \mathbf{w}) = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\rho^f$  は間隙流体の密度、 $n$  は間隙率、 $\mathbf{x}$  は直行座標、 $p$  は間隙流体の圧力、 $\mu$  は粘性係数、 $g$  は重力加速度、 $k$  は透水・透気係数、 $f_{sv}$  は表面張力を意味する。運動方程式を以上のように定義したこと、式(4)は粘性、慣性力、表面張力が無視できる場合、ダルシー則に帰着する。また、非土中の場合 ( $n=1, k=\infty$ )、ナビエ・ストokes方程式に帰着する。

また、 $\phi$  の値に応じて、式(4),(5)で用いる  $\rho^f, \mu, k$  を以下の式<sup>1)</sup>によって内挿する。

$$\rho^f = \frac{\rho^l + \rho^s}{2} + \frac{\rho^l - \rho^s}{2} \sin \left( \left( \phi - \frac{1}{2} \right) \pi \right) \quad (6)$$

$$\mu = \mu^l + (\mu^l - \mu^s) \frac{(\rho^f + \rho^s)}{(\rho^l - \rho^s)} \quad (7)$$

$$k = \exp \left( \phi \ln(k^l) + (1-\phi) \ln(k^s) \right) \quad (8)$$

ここで、 $\rho^l$  と  $\rho^s$  は水と空気の密度、 $\mu^l$  と  $\mu^s$  は水と空気の粘性係数、 $k^l$  と  $k^s$  は飽和状態での透水係数と乾燥状態での透気係数である。

### 3. 数値解析手法

本研究では、差分法により支配方程式の空間離散化を行う。Arakawa-B型スタッガード格子を用い、 $p$  と  $\phi$  を各格子の中央に、 $\mathbf{w}$  を格子点に配置した。移流項には非線形不安定性を回避するために河村・桑原スキーム<sup>2)</sup>を用い、その他の項については二次精度の中心差分近似を用いる。時間微分に関しては、式(1),(4)とも前進差分近似する。ただし、式(4)の右辺第四項の流速は透水・透気係数が小さい場合でも計算の安定性を保つために  $n+1$  ステップの値を用いる。解くべき未知関数は  $\mathbf{w}, p, \phi$  の3つであり、本稿では、以下の通り弱連成解析によりこれらを求める。

Step1:  $\phi^n, \mathbf{w}^n$  の値から、式(1)～(3)を解いて  $\phi^{n+1}$  を求める。

Step2:  $\phi^{n+1}$  の値から  $f_{sv}$  に加え、式(6)～(8)より  $\rho^f, \mu, k$  を算出する。

Step3:  $\mathbf{w}^n$  と Step2 で算出した値から、式(4)と(5)をフラクショナルステップ法により解いて  $\mathbf{w}$  と  $p$  を求め る。

提案解析手法の妥当性を検討するために、赤井・宇野<sup>3)</sup>が行った実験との比較計算を行った。図1に示すように、長さ 315cm、幅 23cm、高さ 33cm の砂模型の両端の水位を変化させ、砂模型内部の浸透流を以下の 2 ケースの条件で計算した。

Case 1: 乾燥した砂模型の初期水位が無い状態から、左側の水位のみを瞬時に 20cm まで上昇させる。

Case 2: 乾燥した砂模型の初期水位が 10cm の状態から、左側の水位のみを瞬時に 30cm まで上昇させる。

入力した主要なパラメータとして、間隙率  $n=0.44$ 、 $k^l=0.34[\text{cm/sec}]$ 、 $k^s=19.06[\text{cm/sec}]$  を示しておく。

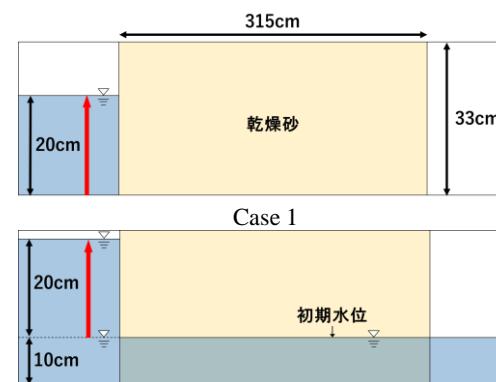


図 1 赤井・宇野<sup>3)</sup>による模型実験の条件

### 4. 数値解析結果

セル幅を  $\Delta x = \Delta y = 0.01[\text{m}]$  として、解析領域を  $315 \times 33$  の直行格子に分割し、時間幅を  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}[\text{sec}]$  として、0sec から 120sec まで計算を行った。Case 1 と Case 2 の浸透流の浸潤線の推移を図2と図3にそれぞれ示す。

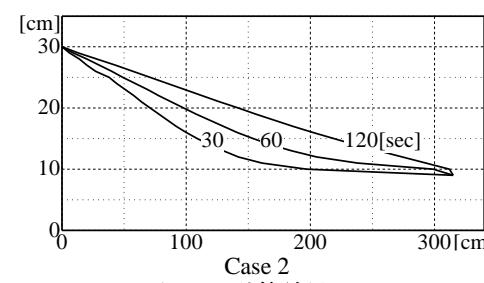
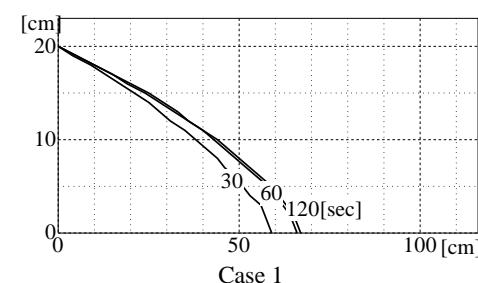
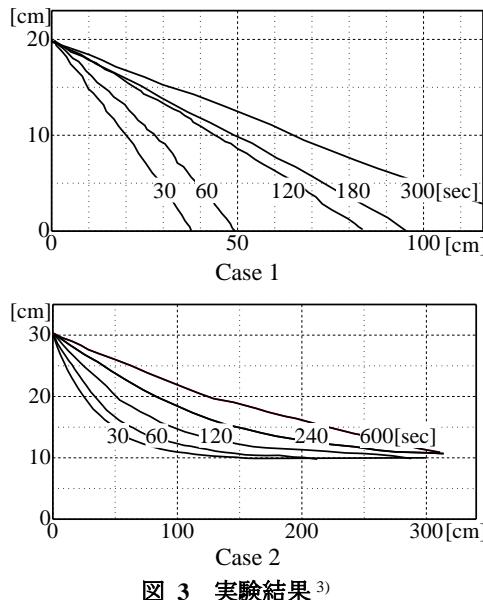


図 2 計算結果

図 3 実験結果<sup>3)</sup>

計算結果と実験結果を比較した結果を以下にまとめるとする。

- (1) Case 1 では、計算と実験はどちらも浸透流の形状がやや上に凸型に進行し、Case 2 では、計算と実験はどちらも浸透流の形状が下に凸型に進行する。
  - (2) Case 2 では、計算の方が、実験よりも浸透流の進行がやや速いものの、進行の様子を概ね捉えることができている。
  - (3) Case 1 では、計算とは異なり浸潤線の進行が停滞してしまう。
- (1)と(2)は、提案手法により不飽和浸透流の解析が可能であることを示唆している。(2)に挙げた、Case 2において浸潤線の進行が実験よりもやや速く進行することの原因として、透水・透気係数の見積もりや内挿方法に不十分な点があったことが挙げられる。また、(3)のように途中で浸潤線の進行が停滞しないようにするために必要なこ

ととして、式(1)の化学ポテンシャル項を改良することが挙げられる。浸透流の進行が止まっているときの界面付近では流速が小さく移流項の影響が小さいため、界面幅を一定にしようとする化学ポテンシャル項が支配的となり、 $\phi$  が変化せず浸潤線の進行が停滞したと考えられる。また、現状の化学ポテンシャル項では不飽和領域の幅が一定に保たれるが、実際の不飽和領域の幅は一定には保たれないため、この観点からも化学ポテンシャル項の改良が必要であると考えられる。

## 5. 結論

本研究では、フェーズフィールド法を用いた土中の不飽和浸透流の解析手法を新たに提案した。また、既往の実験との比較を通して、提案手法により不飽和浸透流解析が可能であることを示した。浸潤線の停滞の解消や定量的評価を向上させるために、透水・透気係数の算定方法を確立することや、フェーズフィールド法の時間発展方程式に含まれる化学ポテンシャルを改良する余地があることを示した。

## 参考文献

- [1] Inamuro, T., Ogata, T., Tajima, S., and Konishi, N.(2004): A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with large density differences, *J. Comput. Phys.*, 198, 628-644. Yamada, Y. et al.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elasto-plastic problems by a finite element method, *Int. J. of Mechanical Science*, Vol.10, pp.343-354, 1968.
- [2] Kawamura, T., and Kuwahara, K. (1984): Unsteady flow simulation and its visualization, AIAA Paper, 84-0340.
- [3] 赤井, 宇野 (1965) : 土中の準一次元非定常流に関する研究, 土木学会論文集, 127, 14-22.