

## PINNsによる2次元静磁場問題解析の基礎的検討

## Fundamental Study on Two-dimensional Magnetostatic Field Analysis by PINNs

荻野正雄<sup>1)</sup>

Masao Ogino

1) 博(工) 大同大学 情報学部 准教授 (〒457-8530 愛知県名古屋市中区滝春町10-3, E-mail: m-ogino@daido-it.ac.jp)

For the magnetostatic field problem derived from Maxwell's equations, the  $A$  method with the magnetic vector potential as the unknown is widely used as the formulation, and the finite element method with edge elements as the spatial discretization. There is also the  $H$  method in which the magnetic field is an unknown as a classical formulation. This paper reports the results of applying PINNs to boundary value problems of partial differential equations formulated by  $A$  method and  $H$  method respectively.

**Key Words :** PINNs, Magnetostatic field analysis, Machine Learning

## 1. はじめに

連続体力学分野で現れる偏微分方程式の初期値境界値問題の数値解析においては、時間・空間を離散化し、節点(格子点)の値を用いた近似多項式を求める方法が広く利用されている。一方、機械学習・人工知能分野においては様々なニューラルネットワークが提案され、利用されている。ニューラルネットワークは任意の連続な関数を近似できる普遍性定理(Universal Approximation Theorem) [1][2]が示されており、万能な関数近似器であると言える。すなわち、偏微分方程式の初期値境界値問題の解関数を近似するニューラルネットワークの構築も可能である。これに対し、近年Physical-Informed Neural Network (PINNs) [3][4]と呼ばれる機械学習手法が注目されている。PINNsは非線形偏微分方程式で記述された物理法則を与えたときに教師あり学習のタスクを解くための機械学習手法である。ニューラルネットワークを構築するための損失関数の設計に偏微分方程式などの物理法則を組み込むことが最大の特徴であるが、実験や観測データを学習データとして与えることで物性値等のパラメータ同定も可能であるという利点がある。

本研究は、Maxwell方程式から導出される静磁場問題にPINNsを適用し、関数近似器としての性能評価を行うことを目的とする。電磁界分野におけるPINNsの適用例[5][6]は少なく、また有限要素法などの従来からの数値解析手法でも解きづらい問題として知られている。今回は比較的解きやすい2次元静磁場問題に適用した数値実験結果について報告する。

## 2. 2次元静磁場問題に対するPINNs

## (1) 静磁場問題

静磁場問題とはMaxwell方程式における時間変化の項を除いて導出される磁場 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ と磁束密度 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ に関する偏微分方程式であり、次式で表される。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ は電流密度である。また、磁場 $\mathbf{H}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の間には次の構成式を与える。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2)$$

ただし、 $\mu$ は透磁率である。今回は磁場と磁束密度が線形である問題を考える。これらの式に基づいて定式化を進める方法をH法と呼ぶ。

また、静磁場問題においては $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ を満たす磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ の存在が知られている。これを用いると、式(1)と(2)から $\mathbf{A}$ を未知数とする次式が得られる。これをA法と呼ぶ。

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (3)$$

式(3)の第2式はゲージ条件と呼ばれ、磁気ベクトルポテンシャルの不定性を除去する役割がある。

## (2) 問題設定と定式化

今回は図1に示す十分に長い電線周りの磁束密度を求める2次元静磁場問題を考える[7]。解析領域全体を $\Omega$ 、真空領域の境界面を $\Gamma_{vacuum}$ とすると、式(3)よりA法は次式を解くことになる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_z & \text{in } \Omega \\ A_z = 0 & \text{on } \Gamma_{vacuum} \end{cases} \quad (4)$$

第1式が支配方程式となる偏微分方程式、第2式は境界条件である。式(4)は $A_z$ に関する2次元ポアソン方程式の境界値問題となっている。式(4)を解いて得られた $A_z$ を用いて、磁束密度は次式で求める。

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (5)$$

すなわち、興味があるのはポアソン方程式の解の導関数である。

近年の静磁場問題の数値解析ではA法が広く利用されているが、今回はPINNsによる関数近似の性能評価を目的とするためにH法についても検討する。式(1)と(2)よりH法は次式を解くこととする。

$$\begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial(\mu H_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu H_y)}{\partial y} = 0 & \text{in } \Omega \\ H_x n_x + H_y n_y = 0 & \text{on } \Gamma_{\text{vacuum}} \end{cases} \quad (6)$$

ただし、 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は境界 $\Gamma_{\text{vacuum}}$ における外向き単位法線ベクトルである。式(6)を解いて得られた磁場の値を式(2)に代入することで磁束密度が求まる。

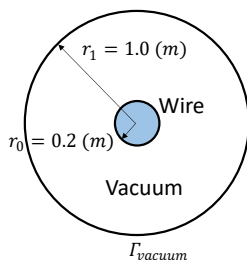


図-1 十分に長い電線周りの静磁場問題

### (3) PINNs

PINNsにおける損失関数を設計する。ここではA法の場合を示す。ある点 $(x, y)$ におけるニューラルネットワークによる磁気ベクトルポテンシャル $A_z$ の予測値を $u(x, y)$ とする。さらに、式(4)の第1式に基づく次の関数 $f$ を考える。

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) + J_z \quad (7)$$

ニューラルネットワークによる予測値が十分な精度を持つのであれば $f = 0$ になる。これらを用いて、損失関数 $\mathcal{L}$ を境界条件(BC)と偏微分方程式(PDE)それぞれに対する平均2乗誤差 $\mathcal{L}_u$ と $\mathcal{L}_f$ の加重和とする。

$$\mathcal{L} = w_u \mathcal{L}_u + w_f \mathcal{L}_f \quad (8)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u &= \frac{1}{N_{BC}} \sum_{i=1}^{N_{BC}} |u(x_u^i, y_u^i) - u^i|^2, \\ \mathcal{L}_f &= \frac{1}{N_{PDE}} \sum_{i=1}^{N_{PDE}} |f(x_u^i, y_u^i)|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

であり、 $N_{BC}$ と $N_{PDE}$ はそれぞれ境界面と領域内の選点数である。

## 3. 数値実験

### (1) 実験設定

物性値である透磁率 $\mu$ は真空領域と電線の両方において、 $4\pi$ または $4\pi \times 10^{-7}$ とする。また、電流密度 $J_z$ は真空領域では $J_z = 0$ 、電線内では $J_z = 1$ とする。

ニューラルネットワークは全結合3層とし、入力座標

$(x, y)$ 、出力は磁気ベクトルポテンシャル $A_z$ の予測値である。隠れ層のユニット数20、活性化関数は $\tanh$ 、重みの初期値はGlorotらの方法、バイアスの初期値はゼロとした。また、OptimizerにはL-BFGS法を用いた。

選点数について $N_{BC}$ は50、 $N_{PDE}$ は200、1,000、または2,000とし、最初にランダムで与えたものを学習中は固定で用いた。

また、全ての計算は倍精度浮動小数点数で行った。

### (2) A法の実験結果1

透磁率 $\mu = 4\pi$ のときの磁束密度の大きさ $\|\mathbf{B}\|$ の分布について、選点数を変えたときの結果を図2から4に示す。各図は、電線の中心に原点を置いた場合のある軸上における磁束密度の大きさの分布であり、点線は理論解、実線はPINNsで予測した $A_z$ から計算した値を描画している。図より、選点数を増やすことで理論解に近づいており、電線と真空領域の境界付近におけるピークも予測できていることが分かる。

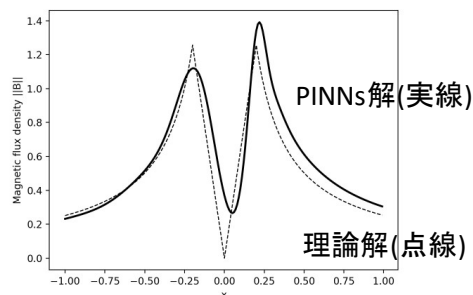


図-2 透磁率 $4\pi$ かつ選点数200における $\|\mathbf{B}\|$ の予測解

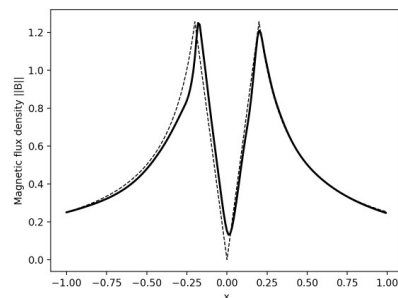


図-3 透磁率 $4\pi$ かつ選点数1000における $\|\mathbf{B}\|$ の予測解

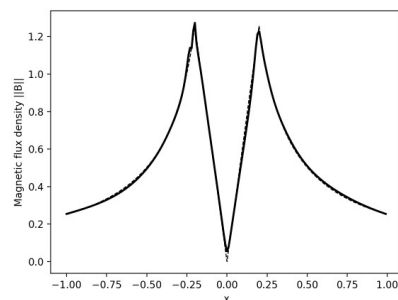


図-4 透磁率 $4\pi$ かつ選点数2000における $\|\mathbf{B}\|$ の予測解

### (3) A法の実験結果2

次に、透磁率 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ のときの磁束密度の大きさ $\|\mathbf{B}\|$ の分布について、選点数2,000における結果を図5に示す。

す。図より、PINNsによる予測解が理論解と大きく異なっていることがわかる。前項との違いは透磁率の値のオーダーのみであるが、式(7)より関数 $f$ に含まれる3つの項に与える影響が異なることが分かる。今回の問題設定ではそのオーダーの違いは7桁程度になるが、透磁率の値の大きさを1桁刻みで変えた実験を行ったところ、徐々に精度が低下する現象が確認された。

転移学習を用いてこの問題を解決する。前項と同じ透磁率 $\mu = 4\pi$ で学習したニューラルネットワークに対して、透磁率 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ に対して出力層のファインチューニングを行った。転移学習した場合のPINNsの予測解を図6に示す。図5の結果に比べて理論解に近い解が得られていることが分かる。

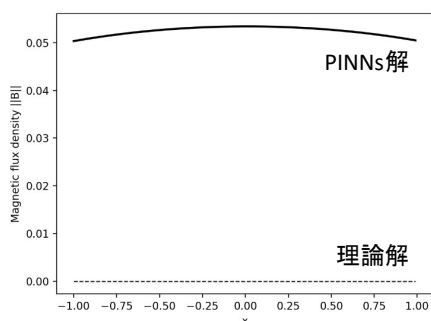


図-5 透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$ における $\|B\|$ の予測解

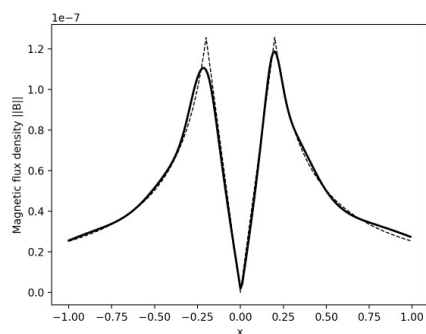


図-6 転移学習の結果

#### (4) H法の実験結果

次にH法に対する実験結果を示す。選点数は1,000とし、透磁率 $\mu = 4\pi$ のときの磁束密度の大きさ $\|B\|$ の分布を図7、透磁率 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ の結果を図8に示す。図3と図7を比較すると、H法に基づくPINNsの予測解は定性的には解の分布をとらえているが、A法に比べると精度が低いものとなった。一方、図8は転移学習を行っていない結果であるが、H法であれば透磁率の値を変えた場合でも比較的近い解を予測できていることが分かる。

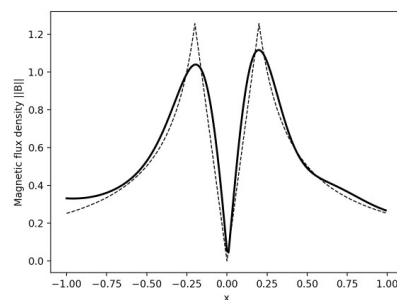


図-7 透磁率 $4\pi$ かつH法における $\|B\|$ の予測解

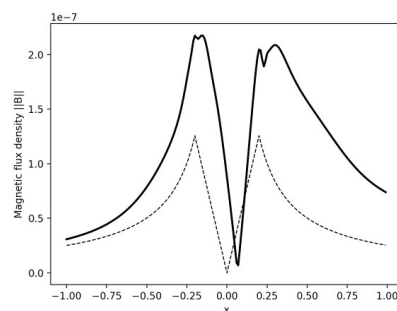


図-8 透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$ かつH法における $\|B\|$ の予測解

#### 4. おわりに

静磁場問題の近似解を求めるためにA法またはH法に基づくPINNsを構築し、理論解との比較を行った。その結果、偏微分方程式に基づく関数における各項のオーダーによっては予測しづらくなり、その場合は転移学習が有効であることが得られた。また、電磁場問題の数値解析では古典的な方法であるH法も利用に適したケースがあり得る知見が得られた。今後は、3次元問題や非線形静磁場問題への適用、観測や有限要素法による数値実験のデータなどを用いたData drivenアプローチでの検証などを進めていく。

謝辞：本研究はJSPS 科研費 No. 22H03605 並びに No. 18KK0278の助成を受けたものである。

#### 参考文献

- [1] Cybenko, G.: Approximation by superpositions of a sigmoidal function, *Math. Control, Signals and Systems*, Vol. 2, pp. 303-314, 1989.
- [2] Hornik, H., Stinchcombe, M., White, H.: Multilayer feedforward networks are universal approximators, *Neural Networks*, Vol. 2, Issue 5, pp. 359-366, 1989.
- [3] Raissi, M., Perdikaris, P., and Karniadakis, G.E.: Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 378, pp. 686-707, 2019.
- [4] Cuomo, S., Di Cola, V.S., Giampaolo, F., Rozza, G., Raissi, M., and Piccialli, F.: Scientific machine learning through

physics-informed neural networks: where we are and what's next, *arXiv*, arXiv:2201.05624v4, 2022.

- [5] Chen, Y., Lu, L., Karniadakis, G.E. et al.: Physics-informed neural networks for inverse problems in nano-optics and metamaterials, *Optics Express*, Vol. 28, Issue 8, pp. 11618-11633, 2020.
- [6] Fang, Z. and Zhang, J.: Deep physical informed neural networks for metamaterial design, *IEEE Access*, Vol. 8, No. 24, pp. 506-24,513, 2020.
- [7] Backstrom, B. and Backstrom, G.: Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis, *GB Publishing*, 2005.