計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月) 計算工学会

ベクトル・テンソル解析再考

Reconsideration of Vector and Tensor Analysis

登坂宣好 1)
Nobuyoshi Tosaka

1)工博 （株）Material speaks T-Lab. 代表 （〒 192-0373 東京都八王子市上柚木 3-9-1-211 E-mail: nob42tsk@gmail.com.)

In conventional vector analysis, gradient of scalar field and divergence and rotation of vector field are introduced as differential quantities under some physical concepts in fluid mechanics and solid mechanics. In this reconsideration the above differential quantities of not only scalar and vector fields but also (second order) tensor field can be defined mathematically on each differential mapping without any physical consideration.

Key Words : *Vector Analysis, Tensor Analysis, Differential Quantities, Differential Mapping, Gibbs Product, Dot Product, Cross Product*

1. はじめに

ベクトル解析はスカラー場とベクトル場の微分積分の体系化である。特に、その基本はそれらの場の変動をとらえるための微分量として導入されているスカラー場の勾配とベクトル場の発散と回転である [1,2]。しかし、ベクトル場の勾配は後述するように重要な微分量であるにも拘わらず通常のベクトル解析で触れられることが少ない。その理由として考えられることは、その微分量が 2 階のテンソルとなりテンソルの理解が必要となるからである。

一方、計算力学の基幹理論である連続体力学では、変形を表現するために変形勾配や変位勾配が基本的な量となっている。したがって、連続体力学の基本数理としてはスカラー場とベクトル場だけではなくテンソル場を含めた微分積分としてのベクトル・テンソル解析が必要である。

このような見地からベクトル・テンソル解析を一貫して構成する試みを既に文献 [3,4] に示してきた。この再考では、各場の微分量が対応する微分写像とどのような関係に基づいて定義できるのかを明確にし、その表現がベクトル演算のスカラー積やベクトル積の拡張によって与えられることを示す。

2. 線形写像とその表現

(1) Gibbs 積

ベクトル解析をテンソル場を含めてベクトル・テンソル解析として統一的に理論化するのに必要な数理をまとめておく。

線形写像としてのテンソルを表現する際に、2 つのベクトルに対して Gibbs[5] によって導入された dyad 積が有効である [6]。本再考ではこのような積を単にベクトル同士だけではなく、スカラーとテンソルを含めて拡張する。そこで、後述する線形写像を dyad 積を含めて Gibbs 積 (Gibbs product) と呼ぶことにする。

定義のベースとなるベクトル空間を内積線形空間 V とし、その各元に対して 3 種類の Gibbs 積を V のスカラー積を基に次のように定義する。

- $(a \odot \boldsymbol{b}) \in L(V, \boldsymbol{R}) \equiv V^*$;

$$(a \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{u}] := a(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) = (a\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \tag{1}$$

- $(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \in L(V, V) \equiv L(V)$;

$$(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \tag{2}$$

- $(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{b}) \in L(V, L(V)) \equiv L^2(V)$;

$$(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \tag{3}$$

ただし、$a, u \in \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u} \in V,\ \boldsymbol{A} \in L(V)$ とする。

この定義から上記の線形写像の随伴写像 (adjoint) が次のように定められる。

- $(a \odot \boldsymbol{b})^a = (\boldsymbol{b} \odot a) \in L(\boldsymbol{R}, V)$ (4)

$$(\boldsymbol{b} \odot a)[u] := \boldsymbol{b}(a \cdot u) = (\boldsymbol{b}a)u$$

- $(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})^a = (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{a}) \in L(V)$ (5)

$$(\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{a})[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})$$

- $(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{b})^a = (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{A}) \in L(L(V), V)$ (6)

$$(\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{A})[\boldsymbol{U}] := \boldsymbol{b}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{U})$$

なお、式 (1) から線形関数 $(a \odot \boldsymbol{b})$ のスカラー積表現定理 [7] により、ベクトル表現を次のように表すものとする。

$$(a \odot \boldsymbol{b})_V = a\boldsymbol{b} \in V \tag{7}$$

さらに式 (4) から

$$(\boldsymbol{b} \odot a)[1] = \boldsymbol{b}a \in V \tag{8}$$

となり、ベクトル $\boldsymbol{b}$ の実数 a 倍は、線形写像と関係づけられた。すなわち、

$$a\boldsymbol{b} = (a \odot \boldsymbol{b})_V = (\boldsymbol{b} \odot a)[1]$$

(2) ドット積

2 つのベクトルに対して定義されるスカラー積をベクトルとテンソルに対する演算として拡張する。ただし、

この演算は次のように写像となることに注意しなければならい。そこでこの演算をドット積 (dot product) と呼びスカラー積の記号を流用する。

$$\bullet\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b})\in L(\boldsymbol{R},V);$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b})[u]:=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}u]=(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}])u \tag{9}$$

$$\bullet\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{A})\in L(V,\boldsymbol{R})\equiv V^*;$$

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{A})[\boldsymbol{u}]:=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{A}[\boldsymbol{u}])=(\boldsymbol{A}^a[\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{u}) \tag{10}$$

このドット積（写像）の間には次の関係が成り立つ。

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{A})^a=(\boldsymbol{A}^a\cdot\boldsymbol{b}) \tag{11}$$

したがって、ベクトルとテンソルのドット積は可換とはならない。なお、このドット積の定義から写像としてのドット積に対して、次の表現を得る。

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b})[1]=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}]1=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}] \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{A})_V=\boldsymbol{A}^a[\boldsymbol{b}] \tag{13}$$

(3)　クロス積

次に、ベクトル同士のベクトル積演算をベクトルとテンソルに対する演算として次のように拡張し、その演算をクロス積 (cross product) と呼び、ベクトル積の記号を流用する。

$$\bullet\ (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{b})\in L(V);$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{b})[\boldsymbol{u}]:=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}] \tag{14}$$

$$\bullet\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{A})\in L(V);$$

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{A})[\boldsymbol{u}]:=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{A}[\boldsymbol{u}]) \tag{15}$$

この定義から、

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{b})^a=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{A}^a) \tag{16}$$

となるので、このクロス積は交代性を有しない。

(4)　Gibbs 積のドット積表現

線形写像の行列表現において、そのトレース (trace) 演算を施すとその行列の対角成分の総和としてスカラーが得られる。そこで、このような演算を線形写像が dyad 積であらわされる場合について考えると次のように 2 つのベクトルのスカラー積として表されることになる。

$$\begin{aligned}Tr\,[(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})]&:=(\boldsymbol{e}^i\cdot(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})[\boldsymbol{e}_i])\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=Tr\,[(\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a})]\end{aligned} \tag{17}$$

そこで、このトレース演算を Gibbs 積に対して次のように拡張し、$\widetilde{Tr}$ と表すことによって、Gibbs 積による線形写像のドット積表現が与えられる。

$$\begin{aligned}\widetilde{Tr}\,[(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{b})]&:=((\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{b})[\boldsymbol{e}_i])[\boldsymbol{e}^i]\\&=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}]\\&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b})[1]\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{Tr}\,[(\boldsymbol{A}^a\odot\boldsymbol{b})]&=\boldsymbol{A}^a[\boldsymbol{b}]\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{A})_V\end{aligned} \tag{19}$$

(5)　Gibbs 積のクロス積表現

交代線形写像のベクトル積表現定理 [7] によれば、交代線形写像は 2 つのベクトルのベクトル積として表現されることになる。そのベクトルは交代線形写像の軸ベクトルと呼ばれている。そこで、線形写像をベクトル積に変換するような写像を Tv と表し次のように定義する。

$$\begin{aligned}Tv\,[(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})]&:=(\boldsymbol{e}^i\times(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})[\boldsymbol{e}_i])\\&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{20}$$

さらに、Gibbs 積をクロス積に変換する写像を T_v の拡張と考え $\widetilde{T}_v$ と表し次のように定義する。

$$\begin{aligned}Tv\,[(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{b})]&:=(\boldsymbol{e}_i\odot\boldsymbol{e}_j)((\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{b})[\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^i])\\&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{A})\end{aligned} \tag{21}$$

3.　場とその微分写像

(1)　場とその表現

ベクトル・テンソル解析で対象となる量は 3 次元空間の点において定義されるスカラー値、ベクトル値、テンソル値関数である。これらの関数は、スカラーば、ベクトル場、テンソル場と呼ばれている。この各場を次のように定義する。

3 次元ユークリッド点空間を E とし、それに付随する内積ベクトル空間を V とする。E の座標枠として、原点と呼ぶ点 O と V の右手系の正規直交基底　$\{\boldsymbol{e}_i\}$ を選ぶ。そこで、E の任意の点 P に対して、スカラー場、ベクトル場、テンソル場をそれぞれ $f(P),\boldsymbol{f}(P),\boldsymbol{F}(P)$ と表す。各場に対し、次のように表現する。

$$f(P):=f(P)1 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{f}(P):=f^i(P)\boldsymbol{e}_i \tag{23}$$

$$\boldsymbol{F}(P):=F^i_j(P)(\boldsymbol{e}_i\odot\boldsymbol{e}^j) \tag{24}$$

ただし、1 は実空間 $\boldsymbol{R}$ の単位基底、$(\boldsymbol{e}_i\odot\boldsymbol{e}^j)$ は $L(V)$ の標準基底とする。

(2)　場の微分写像

ベクトル・テンソル解析における基本微分量を定義するために各場の微分写像を導入する。微分写像は各場の方向微分係数を用いることによって次のように定義できる。

$$df(P):=(f(P)\odot\nabla) \tag{25}$$

$$d\boldsymbol{f}(P):=(\boldsymbol{f}(P)\odot\nabla) \tag{26}$$

$$d\boldsymbol{F}(P):=(\boldsymbol{F}(P)\odot\nabla) \tag{27}$$

ただし、記号 ∇ は微分演算子ナブラ（ベクトル）とする。

上記の微分写像からそれらの随伴写像を定めると次のようになる。

$$(df(P))^a:=(\nabla\odot f(P)) \tag{28}$$

$$(d\boldsymbol{f}(P))^a:=(\nabla\odot\boldsymbol{f}(P)) \tag{29}$$

$$(d\boldsymbol{F}(P))^a:=(\nabla\odot\boldsymbol{F}(P)) \tag{30}$$

以上の結果から各場の微分写像とその随伴は、場と微分演算子ナブラの Gibbs 積として表すことができた。

© 一般社団法人日本計算工学会

4. スカラー場の微分量

スカラー場の微分量として勾配が定義されている。本論ではその勾配を前述した微分写像とその随伴に注目して以下のように定義する。

$$grad_r\, f(P) := (\, df(P)\,)_V = f(P)\nabla \tag{31}$$

$$grad_l\, f(P) := (\, df(P)\,)^a[1] = \nabla f(P) \tag{32}$$

この 2 つの勾配ベクトルの定義によりそれらは一致することがわかる。すなわち、

$$grad_r\, f(P) = grad_l\, f(P) \tag{33}$$

ただし、下の添え字 $r(right), l(left)$ は、各々微分演算子ナブラの場に対する右、左作用方向を示すものとする。

この結果、スカラー場の慣用の勾配の表現がスカラー場の微分写像と関係づけられ、ナブラの $f(P)$ 倍（ベクトルの実数倍）となる。

5. ベクトル場の微分量

(1) 微分量

ベクトル場の微分量としては従来の発散と回転のほかに勾配も定義できる。そこで以下では、その 3 種類の微分量をすでに定めた微分写像を用いることによって定義できることを示す。

(2) 勾配

ベクトル場の勾配はテンソル場として既に示したスカラー場の勾配の定義の拡張と考えて、微分写像 (26,29) を用いて次のように定義する。

$$grad_r\, \boldsymbol{f}(P) := d\boldsymbol{f}(P) = (\, \boldsymbol{f}(P) \odot \nabla\,) \tag{34}$$

$$grad_l\, \boldsymbol{f}(P) := (\, d\boldsymbol{f}(P)\,)^a = (\, \nabla \odot \boldsymbol{f}(P)\,) \tag{35}$$

この定義より両者はベクトル場 $\boldsymbol{f}(P)$ と ∇ との Gibbs 積表現となるが、

$$grad_r\, \boldsymbol{f}(P) = (\, grad_l\, \boldsymbol{f}(P)\,)^a \tag{36}$$

となるので、スカラー場の勾配量を導入する場合は区別が必要となる。.

(3) 発散

ベクトル場の発散はベクトルのスカラー積表現を用いてスカラー場として定義されている。そこで、ベクトル場の発散を Gibbs 積表現として表されている微分写像のトレース演算 (17) によって次のように定義する。

$$\begin{aligned} div_r\, \boldsymbol{f}(P) &:= Tr\,[\, d\boldsymbol{f}(P)\,] = Tr\,[\,(\, \boldsymbol{f}(P) \odot \nabla\,)\,] \\ &= (\, \boldsymbol{f}(P) \cdot \nabla\,) \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} div_l\, \boldsymbol{f}(P) &:= Tr\,[\,(d\boldsymbol{f}(P))^a\,] = Tr\,[\,(\, \nabla \odot \boldsymbol{f}(P)\,)\,] \\ &= (\, \nabla \cdot \boldsymbol{f}(P)\,) \end{aligned} \tag{38}$$

この結果、両定義は一致し $\boldsymbol{f}(P)$ と ∇ のスカラー積表現となり慣用の定義となる。すなわち、

$$div_r\, \boldsymbol{f}(P) = div_l\, \boldsymbol{f}(P) = (\, \nabla \cdot \boldsymbol{f}(P)\,) \tag{39}$$

(4) 回転

ベクトル場の回転はベクトルのベクトル積を用いてベクトル場として定義されている。そこで、ベクトル場の回転を微分写像 (26) と (29) のベクトル積表現 (20) を用いて次のように定義する。

$$\begin{aligned} rot_r\, \boldsymbol{f}(P) &:= T_v[\,(\, d\boldsymbol{f}(P)\,)^a\,] = T_v[\,(\, \nabla \odot \boldsymbol{f}(P)\,)\,] \\ &= (\, \boldsymbol{f}(P) \times \nabla\,) \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} rot_l\, \boldsymbol{f}(P) &:= T_v[\, d\boldsymbol{f}(P)\,] = T_v[\,(\, \boldsymbol{f}(P) \odot \nabla\,)\,] \\ &= (\, \nabla \times \boldsymbol{f}(P)\,) \end{aligned} \tag{41}$$

この結果、両者はベクトル $\boldsymbol{f}(P)$ と ∇ とのベクトル積表現となるが、お互いに符号が異なることになる。すなわち、

$$rot_l\, \boldsymbol{f}(P) = -rot_r\, \boldsymbol{f}(P) = (\, \nabla \times \boldsymbol{f}(P)\,) \tag{42}$$

したがって慣用のベクトル場の回転は左回転 $rot_l\, \boldsymbol{f}(P)$ であることがわかる。

6. テンソル場の微分量

(1) 微分量の導出

テンソル場の微分量として、勾配、発散、回転が考えられる。これらの微分量を導出するには次の 2 つの方法が考えられる。

1. テンソル場の微分写像からの導出

   すでに 3，4 章で用いてきた場の微分写像からの導出法をテンソル場を対象として適用する。

2. ベクトル場の微分量からの導出

   テンソル場の任意の定ベクトルの像をベクトル場として考えて、このようなベクトル場に対して既に定義した微分量を用いてテンソル場の微分量を導き出す方法 [8]。

本論では、既にスカラー場とベクトル場の微分量の導出で用いた場の微分写像からの導出法を採用する。

(2) 勾配

スカラー場とベクトル場の勾配の定義の拡張として、テンソル場の微分写像 (27) とその adjoint (30) とを用いてテンソル場の勾配を次のような 3 階テンソルとして定義する。

$$grad_r\, \boldsymbol{F}(P) := d\boldsymbol{F}(P) = (\, \boldsymbol{F}(P) \odot \nabla\,) \tag{43}$$

$$grad_l\, \boldsymbol{F}(P) := (\, d\boldsymbol{F}(P)\,)^a = (\, \nabla \odot \boldsymbol{F}(P)\,) \tag{44}$$

この定義からテンソル場の勾配は、テンソル場とナブラの Gibbs 積表現として与えられ、両者は次の関係となる。

$$grad_r\, \boldsymbol{F}(P) = (\, grad_l\, \boldsymbol{F}(P)\,)^a \tag{45}$$

したがって、テンソル場の勾配を用いる際には区別が必要となる。

(3) 発散

前章でベクトル場の発散を微分写像 (26) のトレース演算によるベクトル場とナブラのスカラー積表現 (39) として与えた。そこで、テンソル場の発散に対しても

微分写像のトレース演算の拡張として導入した写像 $\widetilde{T}_r$ を用いる。さらに、その写像のドット積表現 (18,19) に注目してテンソル場の発散を次のように定義する。

$$\begin{aligned} div_r\,\boldsymbol{F}(P) &:= \widetilde{T}_r\,[\,d\boldsymbol{F}(P)\,] = \widetilde{T}_r\,[\,(\,\boldsymbol{F}(P)\,\odot\,\nabla\,)\,] \\ &= (\,\boldsymbol{F}(P)\,\cdot\,\nabla\,)[1] = \boldsymbol{F}(P)[\nabla] \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} div_l\,\boldsymbol{F}(P) &:= \widetilde{T}_r\,[\,d\boldsymbol{F}^a(P)\,] = \widetilde{T}_r\,[\,(\,\boldsymbol{F}^a(P)\,\odot\,\nabla\,)\,] \\ &= (\,\nabla\,\cdot\,\boldsymbol{F}(P)\,)_V = \boldsymbol{F}^a(P)[\nabla] \end{aligned} \tag{47}$$

この定義よりテンソル場の発散ベクトル場は、基本的にテンソル場のナブラに対する像として表されることになった。この像はベクトルのスカラー積の拡張であるドット積表現となっている。したがって、この表現はベクトル場の発散（スカラー場）の拡張となっていることになる。なお、この定義からベクトル場の発散が有する定義の対称性とは異なる次の性質を有することに注意しなければならない。

$$div_r\,\boldsymbol{F}(P) = div_l\,\boldsymbol{F}^a(P) \tag{48}$$

(4)　回転

前章でベクトル場の回転を微分写像 (26) のベクトル積表現 (40,41) を用いて 2 つのベクトルのベクトル積表現として与えた。そこで、テンソル場の回転に対してもテンソル場の微分写像に対する写像 $\widetilde{T}_v$ の適用を考える。さらに、その写像のクロス積表現 (21) に注目してテンソル場の回転（2 階テンソル場）を次のように定義する。

$$\begin{aligned} rot_l\,\boldsymbol{F}(P) &:= \widetilde{T}_v\,[\,d\boldsymbol{F}(P)\,] \\ &= \widetilde{T}_v\,[\,(\,\boldsymbol{F}(P)\,\odot\,\nabla\,)\,] \\ &= (\,\nabla\,\times\,\boldsymbol{F}(P)\,) \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} rot_r\,\boldsymbol{F}(P) &:= -(\,\widetilde{T}_v\,[\,d\boldsymbol{F}^a(P)\,]\,)^a \\ &= -(\,\widetilde{T}_v\,[\,(\,\boldsymbol{F}^a(P)\,\odot\,\nabla\,)\,]\,)^a \\ &= (\,\boldsymbol{F}(P)\,\times\,\nabla\,) \end{aligned} \tag{50}$$

この定義により、テンソル場の回転（2 階テンソル場）は基本的にはテンソル場とナブラのクロス積表現として表されることになった。したがって、この表現はベクトル場の回転（ベクトル場）の拡張となっている。なお、上記の表現においてクロス積の性質から両者の間には次の関係が成り立つことになる。

$$rot_r\,\boldsymbol{F}(P) = -(\,rot_l\,\boldsymbol{F}^a(P)\,)^a \tag{51}$$

この定義からテンソル場の回転の導入に関しても区別が必要となる。

7.　おわりに

ベクトル解析における場の微分量であるスカラー場の勾配（ベクトル場）、ベクトル場の発散（スカラー場）と回転（ベクトル場）は、微分演算子ベクトルであるナブラを用いたベクトル演算としての実数倍、スカラー積、ベクトル積によって定義されることが多い。したがって、それらの量が微分量であるにもかかわらず場の微分写像との関係が必ずしも明確となっていない。さらに、ベクトル場の勾配は 2 階テンソル場となるという理由からかベクトル解析に導入されることも少ない。そこで、本再考ではこれらの問題点を解決すべくベクトル場のみならずテンソル場を含めた微分量の統一的な導入について議論した。

各場の微分写像及びその adjoint を場とナブラに関する dyad 積を含む Gibbs 積として表現し、すべての微分量をその表現から定義できることを示した。さらに、導入の基本となる Gibbs 積に対して、場とナブラとのスカラー積とベクトル積を拡張したドット積とクロス積表現を与えるための線形写像を導入することによって、各場の微分量がナブラ表現として与えられた。なお、この導入された線形写像は線形関数のスカラー積表現定理および交代線形写像のベクトル積表現定理の拡張として位置づけられる。

最後に、本論で導入した各場の微分量に対する積分定理に関する再考を引き続き示して行きたい。

参考文献

[1] Marsden,J.E. and Tromba,A.J. : Vector Calculus, W.H.Freeman and Company, 1976.
[2] 藤本淳夫: ベクトル解析、培風館、1979.
[3] 登坂宣好: ベクトル・テンソル場の微分積分、計算工学講演会論文集、Vol. 20, 2015.
[4] 登坂宣好: テンソル代数・テンソル解析ー連続体力学の数理的基礎ー、計算工学、Vol. 20, No 1-4, 2015.
[5] Gibbs,J.W. and Wilson,E.B. : Vector Analysis, Yale University Press, 1901.
[6] 棚橋隆彦：連続体の力学 (6) ーベクトル場の微分と積分ー、理工図書、1988.
[7] 新井朝雄：現代ベクトル解析の原理と応用、共立出版、2006.
[8] Gurtin,M.E. : An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, 2003.

© 一般社団法人日本計算工学会