

# $\mu(I)$ レオロジーモデルを用いた 粒状流の完全陰解法型SPH解析

Fully Implicit SPH Analysis of Granular Flow using  $\mu(I)$  Rheology Model

岡野翔大<sup>1)</sup>, 森川ダニエル<sup>2)</sup>, 大崎春輝<sup>3)</sup>, 浅井光輝<sup>4)</sup>

Shodai Okano, Daniel Morikawa, Haruki Osaki and Mitsuteru Asai

1) 九州大学大学院 工学府土木工学専攻 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡744, E-mail: s-okano@doc.kyushu-u.ac.jp)

2) 海洋研究開発機構 (〒236-0001 神奈川県横浜市金沢区昭和町3173番25, E-mail: morikawad@jamstec.go.jp)

3) 九州大学大学院 工学府土木工学専攻 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡744, E-mail: h-osaki@doc.kyushu-u.ac.jp)

4) 九州大学大学院 工学研究院社会基盤部門 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

In this study, we aimed to model fluidized ground as a fundamental study for developing a numerical analysis technique that can not only predict the scale of occurrence but also estimate the scale of damage. We model granular soil as a continuum with equivalent flow characteristics (rheology) at a macroscopic viewpoint, and employed a  $\mu(I)$  rheology model suitable for granular flow. The implementation in the SPH with explicit time integration causes an instability issue because of the high viscosity in the rheology model, and a fully implicit ISPH method is utilized to overcome the drawback. This significantly relaxed the constraints on time increments. The comparison of numerical and experimental results for sand flow supports the usefulness of the  $\mu(I)$  rheology model and fully implicit ISPH method for granular flow.

**Key Words :** Non-Newtonian fluid, Granular flow,  $\mu(I)$  rheology, Fully implicit ISPH

## 1. はじめに

我が国は急峻な地形が多く、各地で大規模な斜面崩壊が発生している。その発生要因は様々であり、土質の地域性も相まって予測は困難を極める。特に、大雨や短時間強雨の発生頻度は全国的に増加しており、斜面崩壊の被害予測技術の高度化へのニーズが高まっている。そこで本研究では、発生規模の予測のみならず被害規模の想定まで可能な数値解析技術の構築を目指し、その基礎検討として崩壊後の地盤流動現象のモデル化を行った。

本研究では、物体の大変形・分裂・結合を伴う形状変化の激しい問題を効率よく計算できる粒子法の一つであるSPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を採用し、地盤災害に特化した材料モデルの改良を試みた。直径 0.001～10mm 程度の土粒子を直接モデル化した DEM などによる離散体モデルで地盤全体の解析を行うことは、計算コストが膨大になることから非現実的である。そこで、巨視的な視点から、地盤を等価な流動特性 (レオロジー) を持つ連続体とみなした SPH モデルによる解析ツールの開発を行った。特に本研究では、流動化後のレオロジー特性のモデル化に焦点を当て、数値解析結果と実験の比較検証を通してモデル化の妥当性確認を行った。

## 2. 数値解析手法

### (1) 支配方程式と材料モデル

非ニュートン流体はせん断速度によって粘性が変化する流体であり、中でも粘塑性流体は粒状体の流れと類似性があることで知られている。そこで、本研究では流動化した地盤を粘塑性流体としてモデル化した。モデル化し

た流動状態の地盤の非圧縮性流体としての運動方程式は、次式で表される。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は速度、 $\rho$ は密度、 $p$ は圧力、 $\nu$ は動粘度、 $\mathbf{g}$ は外力である。

粘塑性流体については様々な粘性モデルが提案されているが、本研究では $\mu(I)$ モデル[1,2]を用いて、粒状体流れの局所的な動粘度 $\nu$ を次のようにモデル化した。

$$\nu = \frac{1}{\rho\dot{\gamma}} \left\{ c + \left( \mu_s + \frac{\mu_d - \mu_s}{I_0/I + 1} \right) p \right\} \quad (2)$$

ここで、 $\dot{\gamma}$ ,  $c$ ,  $\mu_s$ ,  $\mu_d$ ,  $I_0$ ,  $I$ はそれぞれせん断速度、粘着力、静摩擦係数、動摩擦係数、材料定数、慣性数 (Inertial number) である。慣性数 $I$ は次式で定義される無次元量である。

$$I = \frac{\dot{\gamma}d_s}{\sqrt{p/\rho_s}} \quad (3)$$

ここで、 $d_s$ は材料の粒径、 $\rho_s$ は材料の密度である。

既往研究で多く用いられているBingham モデルと異なり、 $\mu(I)$ モデルは静的摩擦だけでなく、動的な状態の摩擦までが表現できる。

### (2) 離散化手法

SPH法は、連続体の解析領域を有限個の粒子に離散化し、対象粒子の物理量を近傍粒子の物理量の重み付き平均として近似する手法である。非圧縮性流体解析では、速度場を陽的に、圧力場を陰的に解く半陰解法型のソルバーであるISPH (Incompressible SPH) 法が多く用いられている。

しかし、非ニュートン流体を半陰解法によって計算する場合、安定して解析を行うためには、粘性が高い状態での時間増分 $\Delta t$ を非常に小さく設定しなければならない。

そこで、本研究では完全陰解法型ISPH法[3]を導入して運動方程式を解く方針とした。本手法では、粘性項と重力項によって陰的に仮速度 $\mathbf{v}^*$ を求める予測ステップと、圧力Poisson方程式を陰的に解くことにより得られた圧力により次の時間ステップの速度 $\mathbf{v}^{N+1}$ を求める修正ステップに分離して運動方程式を解く。その2つのステップの計算は次式によって与えられる。

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^N + \Delta t(\mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{v}^* + \mathbf{g}) \quad (4)$$

$$\mathbf{v}^{N+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{N+1} \quad (5)$$

粒子 $i$ について式(4)の予測ステップを計算するために、粘性項についてSPH近似を行うと次のようになる。

$$\mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{v}_i^* \cong \sum_j B_{ij} (\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^*) \quad (6)$$

$$B_{ij} = \frac{2v_i m_j \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{\rho_j \mathbf{r}_{ij}^2} \quad (7)$$

ここで、 $j$ は粒子 $i$ の近傍粒子、 $m_j, \rho_j, \mathbf{r}_{ij}, W_{ij}$ はそれぞれ粒子 $j$ の質量、密度、粒子 $i, j$ 間の相対位置ベクトル、 $\mathbf{r}_{ij}$ によって値が定まるカーネル関数（重み関数）である。式(6)を式(4)に代入して整理すると、陰的に仮速度 $\mathbf{v}^*$ を求める次のような連立一次方程式ができる。

$$\left(1 + \Delta t \sum_j B_{ij}\right) \mathbf{v}_i^* - \left(\Delta t \sum_j B_{ij} \mathbf{v}_j^*\right) = \mathbf{v}_i^N + \Delta t \mathbf{g} \quad (8)$$

以上の完全陰解法型ISPH法により、高粘性状態の非ニュートン流体でも無条件で安定した解析を行うことができる。

### 3. 理論解との比較検証

#### (1) 概要

本手法の精度を検証するために、流速分布の理論値が存在する図-1に示す管路流れ(Poiseuille flow)の解析を行った。管路の直径 $R$ 、圧力差 $\Delta p$ 、検査領域の長さ $L$ はそれぞれ0.13m、1000Pa、0.6mとし、数値解析の際の時間増分 $\Delta t$ は $10^{-5}$ s、初期粒子間隔 $d$ は $5 \times 10^{-3}$ mに設定した。

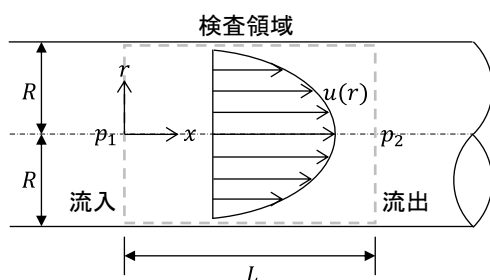


図-1 管路流れ解析の模式図

#### (2) ニュートン流体

ニュートン流体の管路流れにおいて、 $x$ 方向の流速 $u$ の理論値は、管路中央からの距離 $r$ を変数として次のように表される。

$$u = \frac{\Delta p R}{16 \rho \nu L} \left\{ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right\} \quad (9)$$

ここでは、 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、 $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ とした。

図-2に示すように、計算値は理論値と非常に一致しており、管路中央部での誤差は2.59%であった。

#### (3) 非ニュートン流体

非ニュートン流体の粘性モデルの一つであるBinghamモデルでは、動粘度 $\nu$ は次のようにモデル化される。

$$\nu = \nu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \quad (10)$$

ここで、 $\nu_0$ は降伏後の動粘度、 $\tau_y$ は降伏応力であり、 $\nu_0 = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $\tau_y = 50 \text{ Pa}$ とした。Binghamモデルでは、管路流れの流速 $u$ の理論値は次のように表される。

$$u = \frac{\Delta p R^2}{4 \rho \nu L} \left\{ \left( 1 - \frac{r_0}{R} \right)^2 - \left( \frac{r}{R} - \frac{r_0}{R} \right)^2 \right\}, \quad \text{if } r > r_0 \quad (11)$$

$$u = \frac{\Delta p R^2}{4 \rho \nu L} \left\{ \left( 1 - \frac{r_0}{R} \right)^2 \right\}, \quad \text{if } r < r_0 \quad (12)$$

$$r_0 = \frac{2L\tau_y}{\Delta p} \quad (13)$$

図-3に示すように、非ニュートン流体についても計算値は理論値と非常に一致しており、管路中央部での誤差は2.16%であった。以上の比較検証から、本手法がニュートン流体・非ニュートン流体の両方に対して十分な精度で解けることを確認した。

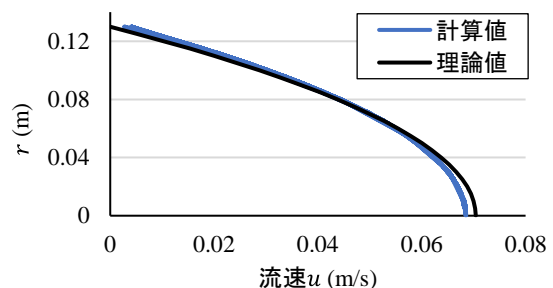


図-2 ニュートン流体の管路流れの流速分布

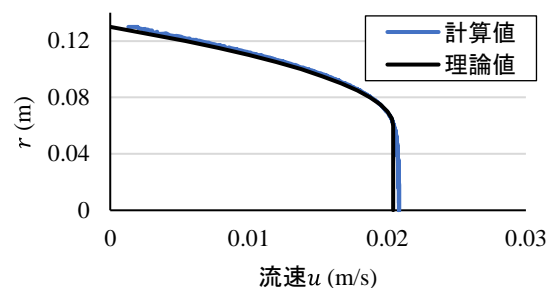


図-3 非ニュートン流体の管路流れの流速分布

4. 実験との比較検証

(1) 概要

次に、粒状体流れに対して本手法の妥当性を確認するために、森口ら[4]の実験の数値解析を行い、結果を比較した。この実験では、図-4、図-5に示すように水平面から傾斜角 $\theta$ だけ傾いた水槽の上部から乾燥砂を自由落下させ、その際の衝撃力を記録している。実験に用いた砂の諸量は、表-1に示す通りである。

数値解析での時間増分 $\Delta t$ は $10^{-3}$ s、初期粒子間隔 $d$ （粒径）は $5 \times 10^{-3}$ mに設定した。実験で用いられた砂の平均粒径 $D_{50}$ は0.273mmであり、単純に平均粒径を用いたDEM解析では2億～3億の粒子（計算点）を要する。その一方、連続体モデルを用いた解析では粒子数を36万に抑え、計算コストを低減させることができた。

表-1 砂の諸量

平均粒径	$D_{50}$	0.273	mm
均等係数	$U_c$	1.37	-
曲率係数	$U_c'$	1.01	-
乾燥密度	$\rho_d$	1379	kg/m <sup>3</sup>
土粒子密度	$\rho_s$	2650	kg/m <sup>3</sup>



図-4 実験装置の写真

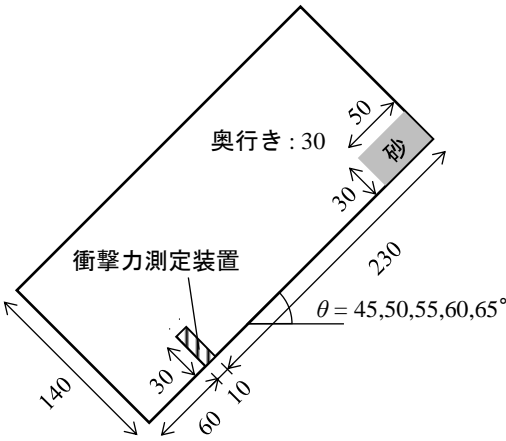


図-5 計算モデルの模式図（単位：cm）

(2) 形状の比較

図-6は実験での砂の形状、図-7は $\mu(I)$ モデルを用いて連続体として計算した砂の形状である。数値解析で得られた流動状態の形状は、実験時の写真と整合した結果が得られた。

その一方で、図-8に示すように、数値解析では時間が経つにつれ堆積した砂の表面が安息角を形成することなく水平に近づくような挙動をしていた。

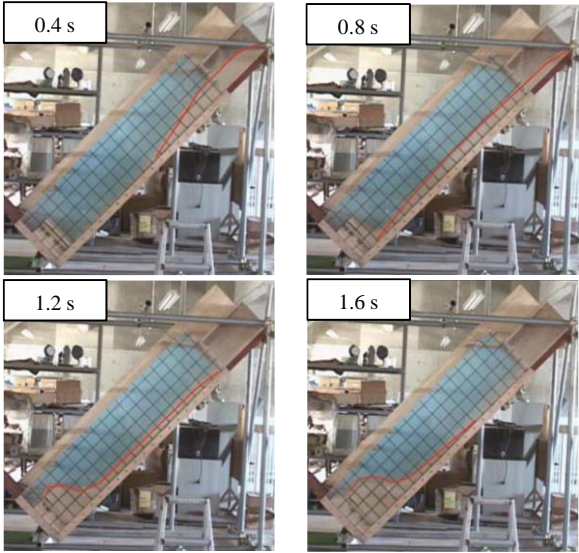


図-6 実験での砂の形状（ $\theta = 45^\circ$ ）

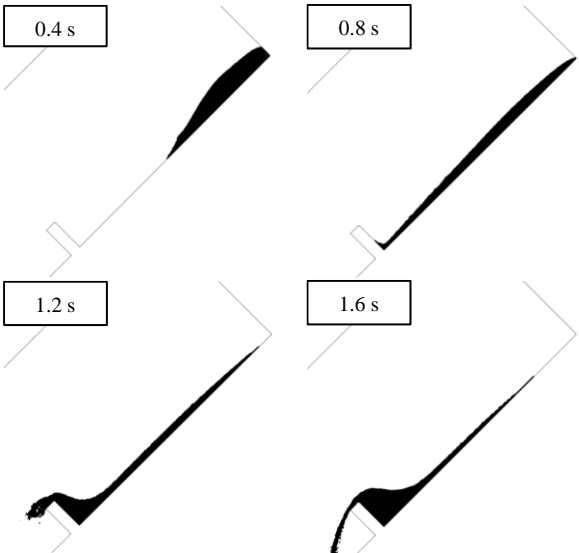


図-7 数値解析での砂の形状（ $\theta = 45^\circ$ ）

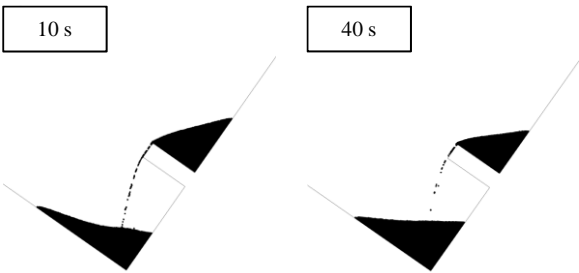


図-8 堆積後の砂の形状（ $\theta = 55^\circ$ ）

### (3) 衝撃力の比較

次に、衝撃力を用いて、定量的な評価を行った。図-9は実験で計測された衝撃力の時系列推移である。傾斜角が大きくなるにつれ、ピーク衝撃力が大きくなる関係があることがわかる。また、 $\theta=55^\circ, 60^\circ, 65^\circ$ の場合は明確なピーク衝撃力があるのに対して、 $\theta=45^\circ, 50^\circ$ の場合は明確なピーク衝撃力がなく、約200Nに達した後横ばいに推移している。このように傾斜角 $\theta$ によって衝撃力の推移の特徴が異なる原因は、砂が流下する速度の違いと、衝撃力測定装置の上に砂が堆積する空間の大きさの違いによるものと思われる。

数値解析では、衝撃力測定装置の内部にダミー粒子を配置し、近傍の流体粒子の圧力を正規化してSPH近似したものをダミー粒子にマッピングした。数値解析における衝撃力は、その総和をとることで算出した。

図-10は各傾斜角における計算値と実験値を比較したものである。形状のみでなく、衝撃力の推移についても、 $\mu(I)$ モデルを用いた計算値は実験値に近い値が得られた。非ニュートンモデルとしてしばしば用いられているBinghamモデルと比較しても、より高い精度でピーク衝撃力を再現できた。なお、ここではBinghamモデルの降伏応力 $\tau_y$ は、粘着力 $c$ 、圧力 $p$ 、内部摩擦角 $\phi'$ を用いてMohr-Coulombの破壊基準から次式のように定義した。

$$\tau_y = c + p \tan \phi' \quad (14)$$

$\mu(I)$ モデルは流体が静的状態から動的状态に遷移していく中で、せん断応力と垂直応力の比が変化する。一方、Binghamモデルはせん断応力と垂直応力の比が一定であるので、動摩擦が支配的な問題では精度が期待できない。そのため、Binghamモデルでは流下速度が大きい(傾斜角 $\theta$ が大きい)ケースほど精度が低くなるものと考えられる。

さらに、図-11、表-2に示す通り、Binghamモデルはピーク衝撃力の誤差が20～40%であったのに対し、 $\mu(I)$ モデルは全て10%以内に抑えることができた。

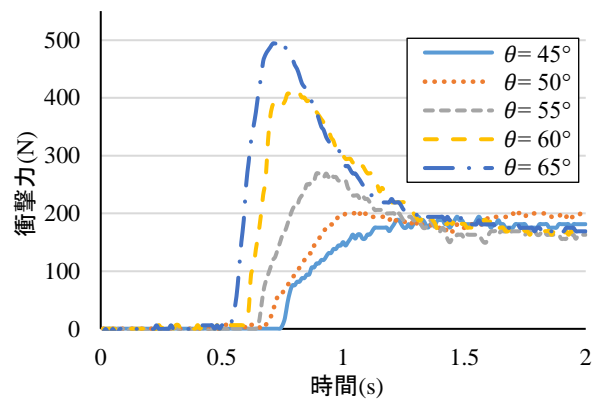


図-9 実験での衝撃力の時系列推移

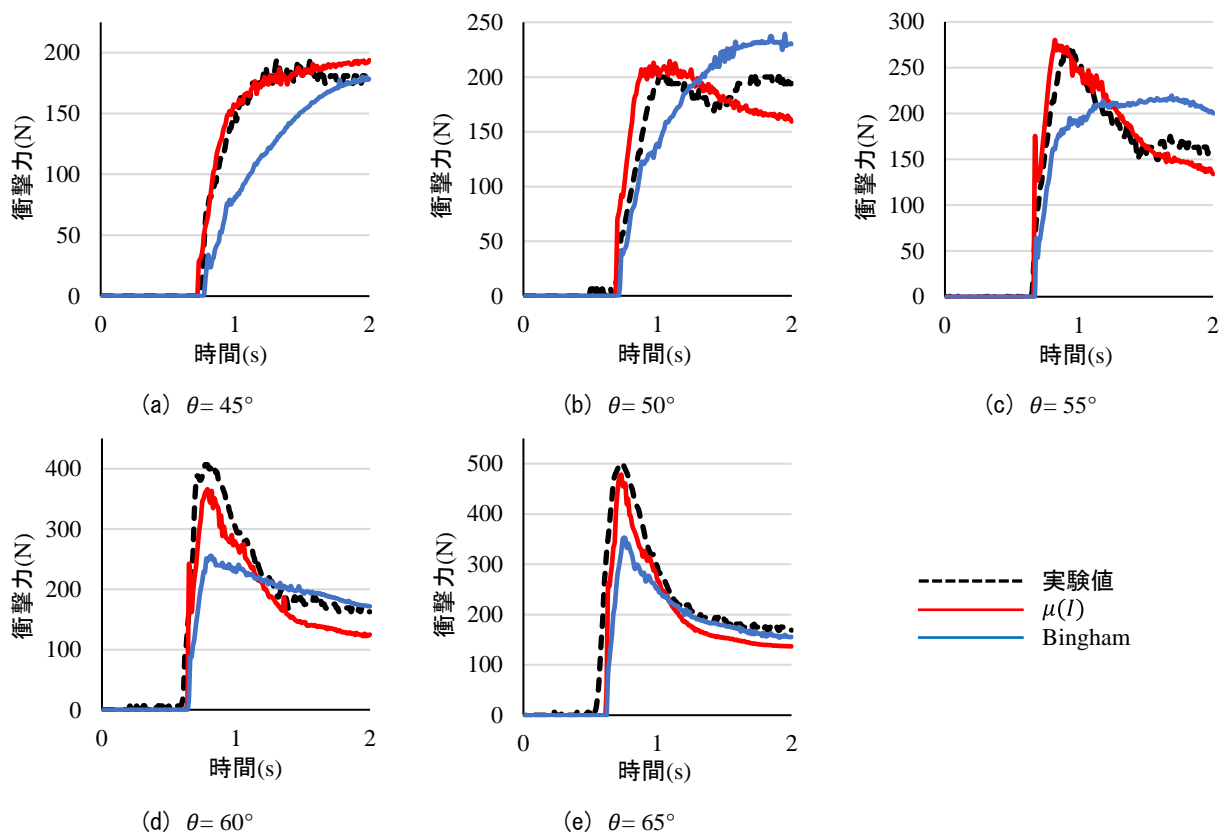


図-10 各ケースにおける衝撃力の時系列推移

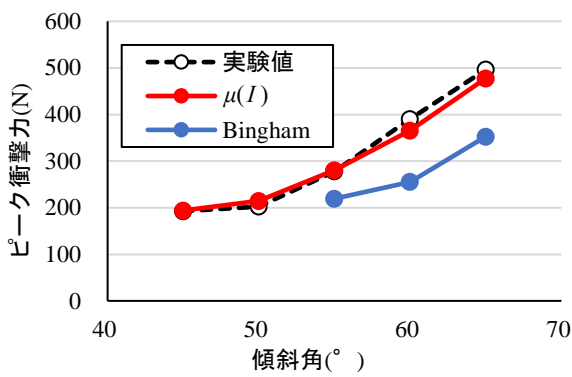


図-11 ピーク衝撃力の比較

5. おわりに

本研究では、斜面崩壊の被害予測のための数値解析手法の構築を目的として、流動化した地盤に着目した基礎検討を行った。非ニュートン流体のひとつである $\mu(I)$ モデルにより地盤をモデル化し、完全陰解法型ISPH法により安定かつ効率的な解析が実施できるように改良した。これにより、非ニュートン流体としてモデル化する際の課題であった時間増分の条件を大幅に緩和させることができた。さらに、数値解析と理論解・実験の比較から、本手法の精度・妥当性を確認した。

今後、安定した地盤が静止状態から流動へと遷移する過程の解析を行う予定である。加えて、本研究で明らかになった、流動から静止状態へと遷移する過程を再現できていないという課題についても、適切なモデル化を検討する。そして、静止→流動→静止という過程の解析をシームレスに行うことで、斜面崩壊の発生から流動化後までを統一的に解くことができる数値解析法へと発展させていく計画である。

表-2 実験のピーク衝撃力との誤差（単位：％）

$\theta$	$\mu(I)$ モデル	Binghamモデル
45°	+0.6	-
50°	+5.9	-
55°	+0.8	-21.1
60°	-6.3	-34.5
65°	-3.8	-29.0

謝辞：この成果は、国立研究開発法人新エネルギー・産業技術総合開発機構（NEDO）の委託業務（JPNP22005）の結果得られたものです。また一部は、JSPS科研費JP 20H02418の助成を受けたものです。

参考文献

[1] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, Vol. 441, No. 7094, pp. 727-730, 2006.

[2] G. Wang, A. Riaz, and B. Balachandran. Smooth particle hydrodynamics studies of wet granular column collapses. *Acta Geotechnica*, Vol. 15, No. 5, pp. 1205–1217, 2020.

[3] D. Morikawa, M. Asai, N. Idris, Y. Imoto, and M. Isshiki. Improvements in highly viscous fluid simulation using a fully implicit SPH method. *Computational Particle Mechanics*, Vol. 6, No. 4, pp. 529-544, 2019.

[4] S. Moriguchi, R. I. Borja, A. Yashima, and K. Sawada. Estimating the impact force generated by granular flow on a rigid obstruction. *Acta Geotechnica*, Vol. 4, No. 1, pp. 57-71, 2009.